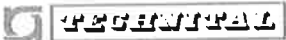



C0	10/06/13	Emissione per approvazione		DV	DL
				EL	CON.
					LM
REVISIONE	DESCRIZIONE				APP.
<b>MINISTERO DELLE INFRASTRUTTURE E DEI TRASPORTI</b> <b>MAGISTRATO ALLE ACQUE</b>					
<b>NUOVI INTERVENTI PER LA SALVAGUARDIA</b> <b>DI VENEZIA</b> LEGGE N.798 DEL 29-11-1984 CONVENZIONE REP. N. 7191 DEL 04-10-1991 ATTO ATTUATIVO REP. 8602 DEL 08-02-2013					
<b>INTERVENTI ALLE BOCCHE LAGUNARI PER</b> <b>LA REGOLAZIONE DEI FLUSSI DI MAREA</b> CUP: D51B02000050AC1					
<b>PROGETTO ESECUTIVO</b>					
<b>WBS: LM.II.48</b> <b>WBE: LM.II.48.PE.09</b>					
<b>BOCCA DI MALAMOCCO – PARATOIE E CONNETTORI</b> <b>PARATOIE</b> <b>ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA</b> <b>PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI</b>					
ELABORATO		CONTROLLATO		APPROVATO	
D. Varisco		D. Lesina		L. Mazza	
N. ELABORATO		CODICE FILE		DATA	
MV080P-PE-MAR-2017-C0		MV080P-PE-MAR-2017-C0.doc		10 Giugno 2013	
<b>CONSORZIO “VENEZIA NUOVA”</b>					
COORDINAMENTO PROGETTAZIONE VERIFICATO:  V. CARRETTA 			PROGETTAZIONE DOTT. ING. <b>ALBERTO SCOTTI</b> Sez. A - Settori a) civile e ambientale b) industrie c) dell'informazione n° A 9782 ING. A. SCOTTI MILANO <b>TECON</b>		
CONTROLLATO:  V. CARBONE CONSORZIO VENEZIA NUOVA M. BRUTO			IL RESPONSABILE PROGETTAZIONE SPECIALISTICA		
<small>OPERA PROTETTA AI SENSI DELLA LEGGE 22 APRILE 1941 N° 633 TUTTI I DIRITTI RISERVATI          QUALSIASI RIPRODUZIONE ED UTILIZZAZIONE NON AUTORIZZATE SARANNO PERSEGUITE A RIGORE DI LEGGE</small>					

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 2
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## SOMMARIO

1	SCOPO .....	3
2	INTRODUZIONE .....	4
3	RIFERIMENTI .....	5
	3.1 GENERALI .....	5
	3.2 DOCUMENTI DI PROGETTO .....	5
	3.3 DISEGNI .....	5
4	CONFIGURAZIONE GEOMETRICA E NOMENCLATURA .....	6
5	CONFRONTO TRA LE POSIZIONI DI PARTENZA E ARRIVO .....	8
6	EQUAZIONE E PARAMETRI CORRELATI .....	14
	6.1 DEFINIZIONE DEL SISTEMA .....	14
	6.2 EQUAZIONE .....	15
	6.3 ELEMENTI TRASCURATI NELL'EQUAZIONE .....	16
7	TERMINI DELL'EQUAZIONE RELATIVI AL MOTO DELLA PARATOIA .....	17
	7.1 TERMINE CINETICO .....	18
	7.1.1 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA DELLA STRUTTURA IN ACCIAIO .....	20
	7.1.2 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA DELLA ZAVORRA COMPLETA .....	20
	7.1.3 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA COMPLEMENTARE (ARIA) .....	22
	7.1.4 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA AGGIUNTA .....	26
	7.2 MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE .....	28
	7.2.1 MOMENTO DOVUTO AL PESO DELLA STRUTTURA IN ACCIAIO .....	29
	7.2.2 MOMENTO DOVUTO AL PESO DELLA ZAVORRA COMPLETA .....	31
	7.2.3 MOMENTO COMPLEMENTARE DELLA BOLLA D'ARIA .....	32
	7.2.4 MOMENTO DOVUTO ALLA SPINTA IDROSTATICA .....	34
	7.2.5 MOMENTO COMPLEMENTARE DI SPINTA .....	35
8	TERMINI DELL'EQUAZIONE RELATIVI AL MOTO DEL FLUIDO SOTTESO .....	37
	8.1 TERMINE CINETICO .....	38
	8.2 MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE .....	41
	8.3 LIMITAZIONE DELLA VELOCITÀ .....	42
9	FLUIDODINAMICA DEL SISTEMA .....	46
10	RICHIAMI DI MECCANICA LAGRANGIANA .....	59
11	UNITA' DI MISURA E DATI FISICI GENERALI .....	62
	11.1 UNITÀ DI MISURA .....	62
	11.2 DATI FISICI GENERALI .....	62
	11.3 CONVERSIONE TRA UNITÀ DI MISURA DELLA PRESSIONE .....	63

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 3
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 1 SCOPO

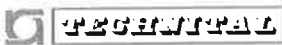
Lo scopo della presente nota è definire metodi ed equazioni per l'analisi del moto della paratoia nella fase di abbattimento.

La formulazione descritta nel presente documento è finalizzata alla costruzione di un programma di calcolo automatico in grado di fornire, in base ai parametri geometrici delle diverse paratoie che compongono il sistema di protezione della laguna veneta (Chioggia, Treporti, S. Nicolò e Malamocco), il comportamento nella fase di abbattimento, e cioè determinare fra l'altro:

- velocità angolare all'impatto degli ammortizzatori collocati con la struttura del cassone di alloggiamento;
- velocità lineare all'impatto in corrispondenza degli ammortizzatori;
- velocità massima della paratoia durante il moto;
- energia cinetica all'impatto;
- energia cinetica massima durante il moto;
- tempo di abbattimento.

I dati di cui sopra forniscono la base per la progettazione del sistema di ammortizzazione, e dei componenti strutturali ad esso connessi.

Il rapporto dettagliato dei risultati del calcolo è oggetto di una relazione separata.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 4
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 2 INTRODUZIONE

Il moto della paratoia durante l'abbattimento è governato da una serie di fattori di natura meccanica, fluidodinamica e termodinamica, che svolgono ruoli concomitanti.

Pertanto la definizione della equazione del moto, prima ancora che la sua soluzione, si presenta complessa e articolata su varie discipline.

L'analisi del problema è stata guidata, tra l'altro, dai dati sperimentali ottenuti con la Paratoia del MOSE (Rif. [P.1]), che hanno fornito indicazioni importanti sull'andamento del moto di abbattimento, orientando quindi la ricerca e lo studio dei fattori fisici che ne erano alla base.

Ciò ha portato a riconoscere come "sistema" l'insieme della paratoia e del fluido da essa sotteso fino al fondo del cassone di alloggiamento; in tal modo, e con i metodi sviluppati in tal senso, la dinamica calcolata teoricamente della paratoia trova una corrispondenza molto soddisfacente con i risultati sperimentali citati.

Parallelamente si è riconosciuto l'angolo di abbattimento  $\theta$  come la coordinata che da sola è in grado di descrivere il moto.

Nel presente documento l'equazione del moto viene definita in base al formalismo lagrangiano, che permette una descrizione coordinata e coerente delle diverse componenti e risulta indispensabile in problemi di questa complessità. L'equazione è stata impostata dunque come:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F = N_P(\theta) + N_F(\theta)$$

ove:

- T rappresenta l'energia cinetica; N il momento delle forze esterne
- i pedici "P" ed "F" si riferiscono alla Paratoia e al fluido sotteso rispettivamente.

Si sono considerati e sviluppati quindi i diversi termini che entrano nell'equazione, ossia sono state condotte le seguenti analisi:


- analisi dei momenti di inerzia di massa delle varie componenti della paratoia e connessi con TP. Alcuni di essi sono noti dalle configurazioni geometriche/impiantistiche dei manufatti; per altri –non preventivamente determinati - sono stati condotti calcoli dettagliati;
- analisi delle forze esterne agenti sulla paratoia e dei relativi momenti  $N_P$  rispetto all'asse di rotazione. Sono stati quindi presi in esame i pesi delle varie componenti della paratoia e le relative spinte idrostatiche;
- analisi del moto del fluido sotteso dalla paratoia e forzato durante l'abbattimento, finalizzata al calcolo dei termini  $T_F$  ed  $N_F$ .

La fluidodinamica del sistema, evidentemente complessa, è stata sviluppata con metodi analitici approssimati ma comunque in grado di fornire un modello di comportamento attendibile e verificato ove possibile con risultati provenienti da fonti alternative. Il moto del fluido è stato schematizzato in ipotesi irrotazionali e non viscosi e con geometria semplificata, tenendo poi conto della viscosità secondo i metodi dello strato limite turbolento.

Tale modellazione ha permesso di determinare la resistenza che la paratoia incontra nel suo moto entro il fluido, che ha condotto ad una più che soddisfacente congruenza con i risultati sperimentali disponibili.

La formulazione descritta nel presente documento è stata poi tradotta in un programma di calcolo automatico; numerose analisi sono state quindi eseguite per confronto con i risultati sperimentali del MOSE, e poi con i parametri reali delle paratoie di Chioggia, Treporti, S. Nicolò e Malamocco.

Il rapporto dettagliato di questi risultati di calcolo è oggetto di relazioni separate per ogni barriera.

 <b>GENERALI</b>	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 5
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 3 RIFERIMENTI

#### 3.1 GENERALI

RIF.	Titolo / Descrizione
[G.1]	Lagrangian Dynamics – D.A. Wells –McGraw Hill – New York
[G.2]	Fluid Dynamics - W.F. Hughes, J.A. Brighten – McGraw Hill – New York
[G.3]	Roark's Formulas For Stress And Strain - 7th Ed. – W:C: Young R.G. Budynas
[G.4]	Termodinamica – E. Fermi - Boringhieri

#### 3.2 DOCUMENTI DI PROGETTO

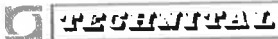
RIF.	Titolo / Descrizione
[P.1]	Ministero dei Lavori Pubblici – Magistrato alle Acque - Interventi per la Salvaguardia di Venezia Convenzione Rep. 7025 del 15/12/1989 – Legge 29/11/1984 N. 798 Rapporto Conclusivo sulla Sperimentazione sul MO.S.E Consorzio Venezia Nuova

#### 3.3 DISEGNI

REF.	Doc. No.	Rev.	Titolo / Descrizione
[D.1]	MV078P-PE-CAD-2007	A3 (*)	Bocca di Chioggia – Paratoie e Connettori – Progetto Esecutivo Paratoia- Assieme Strutturale
[D.2]	MV089P-PE-TAD-2007	A2 (**)	Bocca di Lido Treporti – Paratoie e Connettori – Progetto Esecutivo Paratoia- Assieme Strutturale
[D.3]	MV082P-PE-NAD-2007	A2 (**)	Bocca di Lido S. Nicolò – Paratoie e Connettori – Progetto Esecutivo Paratoia- Assieme Strutturale
[D.4]	MV080P-PE-MAD-2007	A3 (*)	Bocca di Malamocco – Paratoie e Connettori – Progetto Esecutivo Paratoia- Assieme Strutturale

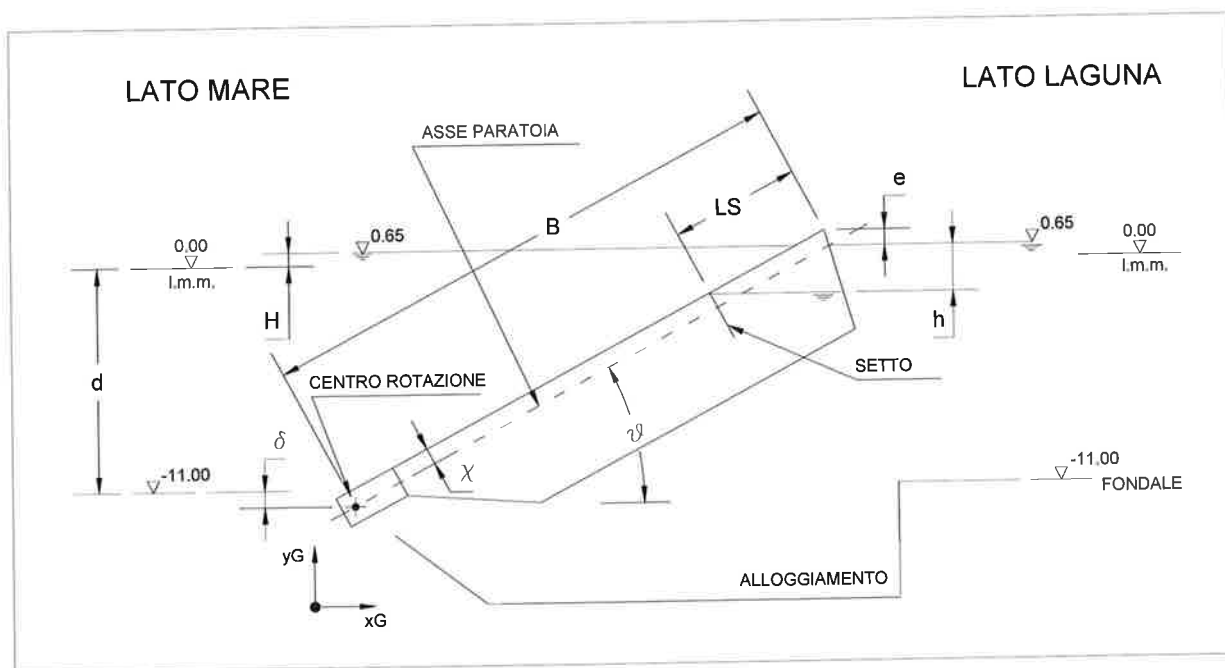
(\*) Progetti Esecutivi in corso

(\*\*) Progetti Esecutivi approvati, in cui le tavole sono state aggiornate senza significative modifiche per l'analisi del moto di abbattimento

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 6
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

#### 4 CONFIGURAZIONE GEOMETRICA E NOMENCLATURA


La figura seguente riporta i parametri geometrici fondamentali delle Paratoie: viene rappresentata la configurazioni all'inizio dell'abbattimento.



La tabella seguente riporta come tipici i valori geometrici relativi alla Paratoia di Chioggia (dei quali alcuni sono già riportati in figura):

Parametro	Descrizione	Valore (Chioggia)	Origine	Osservazioni
B	Lunghezza Paratoia misurata dall'asse cerniera	26.6 m	Configurazione Geometrica Paratoia Rif. Par. 3.3	Parametri Costanti
G	Larghezza Paratoia (Non mostrata in figura)	19.92 m		
L <sub>s</sub>	Lunghezza del compartimento delimitato dal Setto	6.4 m		
χ	Distanza tra Asse di Rotazione e piano paratoia lato Mare	0.80 m		
δ	Distanza verticale tra Centro di Rotazione e piano Fondale	0.80 m		
d	Profondità acqua per Livello Medio Mare (LMM)	11.0 m	Dati di progetto	Parametri Costanti
H	Livello Mare rispetto a LMM	0.65 m	Risultati del calcolo di equilibrio minimo	Valori all'inizio dell'abbattimento
h	Livello Acqua in Paratoia rispetto al livello in laguna	2.49 m		
e	Emersione della Paratoia	0.34 m		
θ	Posizione Angolare riferita al piano Fondale	27°		
Valori della Configurazione Geometrica e dell'equilibrio all'inizio dell'abbattimento relativi alla paratoia di Chioggia				

L'origine degli assi di riferimento è nel centro di rotazione.

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 7
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

A proposito di quanto riportato sopra valgono le presenti considerazioni:

### **POSIZIONE DI EQUILIBRIO PER ANGOLO MINIMO E SUA DETERMINAZIONE**

La posizione di equilibrio cui si fa riferimento nella tabella precedente è quella all'inizio dell'abbattimento.

Tale posizione viene sinteticamente indicata come "Posizione di equilibrio minimo"; essa è definita come l'assetto (angolo, pressione, ecc.) che corrisponde al minimo angolo  $\theta_{EQ}$  per il quale è possibile l'equilibrio stesso.

Tale configurazione viene determinata mediante il programma di analisi statica PARAT3.

Il minimo angolo  $\theta_{EQ}$  per il quale è possibile una posizione di equilibrio determina un valore corrispondente di  $h$  e la conseguente pressione di equilibrio  $p_{EQ}$  dell'aria contenuta:

$$p_{EQ} = p_A + h \cdot \rho \cdot g$$

Ove (cfr. par. 11.2)

$p_A = 101325 \text{ N/m}^2$	pressione atmosferica media
$g = 9.81 \text{ m/sec}^2$	accelerazione di gravità
$\rho = 1030 \text{ kg/m}^3$	densità di massa dell'acqua di mare

Va osservato che:

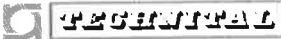
- variando la pressione  $p$  dell'aria contenuta nella paratoia (e quindi  $h$  e la emersione "e") si possono ottenere, con continuità, posizioni di equilibrio con angolo  $\theta > \theta_{EQ}$ , in linea di principio fino (quasi) alla posizione verticale;
- La pressione  $p_{EQ}$  è inferiore alla pressione  $p_s$  necessaria per sollevare la paratoia quando si trova nell'alloggiamento, in altre parole la quantità d'aria in nmc necessaria per sollevare la paratoia è maggiore a quella contenuta nella paratoia in equilibrio in  $\theta_{EQ}$ ; pertanto la pressione di sollevamento porta la paratoia ad una posizione di lavoro  $\theta_W > \theta_{EQ}$ ;
- La posizione  $\theta_{EQ}$  dunque si raggiunge sfiatando aria dalla precedente posizione  $\theta_W$ ;
- Per angoli inferiore a  $\theta_{EQ}$  l'equilibrio statico non è possibile; quindi se in  $\theta_{EQ}$  si sfiata ulteriormente aria la discesa ha inizio.
- 
- Conseguentemente lo studio del moto in abbattimento avrà inizio esattamente dalla configurazione  $\theta_{EQ}$ .

### **ALTRE CONSIDERAZIONI**

Il livello in laguna si suppone uguale a quello in mare.

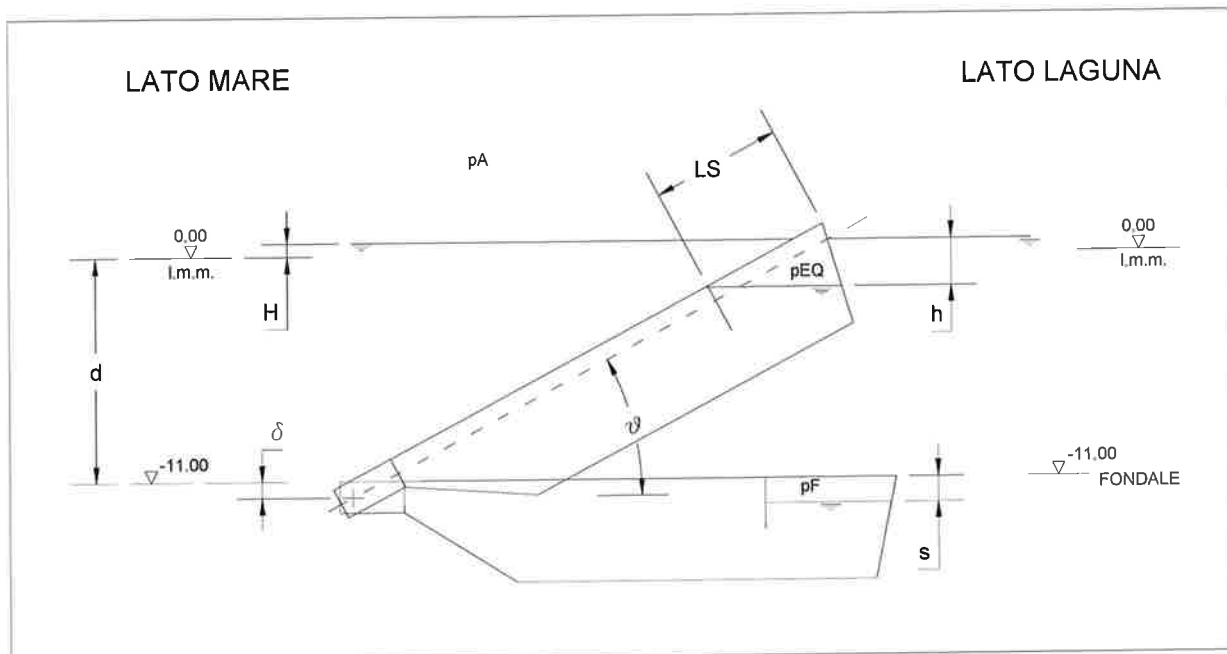
Si è adottata la  $y$  come asse verticale: ciò consente di considerare positivo l'angolo nelle analisi vettoriali che saranno adottate.

Dalla figura si noti che la posizione del setto è tale che il livello dell'acqua nella paratoia all'inizio del moto si trova racchiusa in una regione di sezione pressoché triangolare situata nella parte terminale della paratoia; questo fatto sarà sfruttato per semplificare il contributo di spinta dell'aria.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 8
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 5 CONFRONTO TRA LE POSIZIONI DI PARTENZA E ARRIVO

Confrontiamo nella figura seguente le posizioni di partenza ed arrivo della paratoia:



Per quanto detto al par. 4 lo stato all'inizio del moto di abbattimento corrisponde alla posizione di equilibrio minima (corrispondente cioè al minimo angolo), pertanto le grandezze variabili nella posizione iniziale sono indicate col pedice "EQ".

Il pedice "F" indica invece le grandezze variabili corrispondenti alla posizione finale, che è nota, e vede la paratoia orizzontale con la superficie ex-lato mare allineata col fondo.

Prendiamo in esame il volume occupato dall'aria e la relativa pressione.

Inizialmente (cfr. par 3.2):

$$p_{EQ} = p_A + h \cdot \rho \cdot g$$

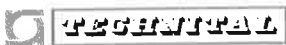
Nella posizione finale invece:

$$p_F = p_A + (d + H + s) \cdot \rho \cdot g$$

Ove "s" è da determinarsi.

Si suppone che il moto avvenga senza che la quantità d'aria cambi.



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 9
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Consideriamo ora i volumi, utilizzando la legge dei gas perfetti (Rif. [G.4]):

$$p \cdot V = \mu \cdot R \cdot T$$

p pressione

V volume

$\mu$  numero di moli di gas (valore che non cambia in assenza di fuoriuscita di gas dalla paratoia)

R costante dei gas

T temperatura

Assumiamo ora un processo di compressione adiabatica (senza scambio di calore con l'ambiente). Questa ipotesi è giustificata dal fatto che il processo dinamico si svolge in un tempo relativamente breve, tale che lo scambio termico risulti trascurabile.

Dalla termodinamica dunque possiamo scrivere (Rif. [G.4]):

$$p_{EQ} \cdot (V_{EQ})^\gamma = p_F \cdot (V_F)^\gamma$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} \approx 1.4$$

$\gamma$  è il rapporto tra Calore Specifico a pressione costante e Calore Specifico a volume costante dell'aria.

Si noti che se il processo avvenisse a temperatura costante al posto di  $\gamma$  si avrebbe l'unità.

Le quantità all'equilibrio sono note.

Sappiamo d'altronde che (trascurando la leggera svasatura del lato estremo della paratoia e lo spessore della paratoia):

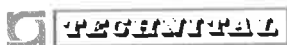
$$V_F \approx s \cdot G \cdot L_S$$

Ove:

G larghezza della paratoia (eguale sia per  $V_{EQ}$  che per  $V_F$ )

Per cui sostituendo le espressioni sopra determinate per  $V_F$  e  $p_F$ :

$$p_{EQ} \cdot (V_{EQ})^\gamma = [p_A + (d + H + s) \cdot \rho \cdot g] \cdot [s \cdot G \cdot L_S]^\gamma$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 10
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H+s) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g + s \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \left[ 1 + \frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

Nell'ipotesi ragionevole:

$$\frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \ll 1$$

$$\left[ 1 + \frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \approx 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g}$$

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \left[ 1 + \frac{1}{\gamma} \frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \right] \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

Ne risulta un'equazione di secondo grado che permette di determinare s:

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot [s \cdot G \cdot L_S] + \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot \frac{s \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot G \cdot L_S \cdot s + \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot s^2 \cdot \rho \cdot g \cdot G \cdot L_S$$

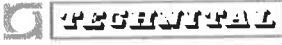
Possiamo scrivere l'equazione direttamente in termini di  $V_F$ , utilizzando la:

$$s \approx \frac{V_F}{G \cdot L_S}$$

Quindi:

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot G \cdot L_S \cdot \frac{V_F}{G \cdot L_S} + \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot \left( \frac{V_F}{G \cdot L_S} \right)^2 \cdot \rho \cdot g \cdot G \cdot L_S$$

$$(p_{EQ})^{\frac{1}{\gamma}} \cdot (V_{EQ}) = [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_F + \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]^{\frac{1}{\gamma}-1} \cdot (V_F)^2 \cdot \frac{1}{G \cdot L_S} \cdot \rho \cdot g$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 11
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$\frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^{1-1} \cdot \frac{\rho \cdot g}{G \cdot L_S} \cdot (V_F)^2 + [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^1 \cdot V_F - (p_{EQ})_Y^1 \cdot V_{EQ} = 0$$

Per cui:

$$V_F = \frac{-(p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g)_Y^1 \pm \sqrt{(p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g)_Y^2 + 4 \cdot \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^{1-1} \cdot \frac{\rho \cdot g}{G \cdot L_S} \cdot (p_{EQ})_Y^1 \cdot V_{EQ}}}{2 \cdot \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^{1-1} \left( \frac{\rho \cdot g}{G \cdot L_S} \right)}$$

Il segno positivo per il radicale è l'unica scelta congruente per cui:

$$V_F = \frac{-(p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g)_Y^1 + \sqrt{(p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g)_Y^2 + 4 \cdot \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^{1-1} \cdot \frac{\rho \cdot g}{G \cdot L_S} \cdot (p_{EQ})_Y^1 \cdot V_{EQ}}}{2 \cdot \frac{1}{\gamma} [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^{1-1} \left( \frac{\rho \cdot g}{G \cdot L_S} \right)}$$

Una prima valutazione di  $V_F$  si può ottenere trascurando del tutto il battente idraulico addizionale dovuto ad  $s$ , in altre parole ritenendo che  $s=0$ .

In questo caso l'equazione si semplifica perdendo il termine quadratico:


$$(p_{EQ})_Y^1 \cdot (V_{EQ}) \approx [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^1 \cdot [s \cdot G \cdot L_S]$$

$$(p_{EQ})_Y^1 \cdot (V_{EQ}) \approx [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^1 \cdot V_F$$

Da cui:

$$(p_{EQ})_Y^1 \cdot (V_{EQ}) \approx [p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g]_Y^1 \cdot V_F$$

$$V_F \approx \left[ \frac{p_{EQ}}{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g} \right]_Y^1 \cdot V_{EQ}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 12
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Si utilizzano come tipici i valori della paratoia di Chioggia (cfr. parr. 4 e 11.2):

$p_A = 101325 \text{ N/m}^2$	pressione atmosferica media
$g = 9.81 \text{ m/sec}^2$	accelerazione di gravità
$\rho = 1030 \text{ kg}_M/\text{m}^3$	densità di massa dell'acqua di mare
$h = 2.49 \text{ m}$	Livello Acqua in Paratoia rispetto al livello in laguna
$d = 11.0 \text{ m}$	Livello Medio Mare (LMM)
$H = 0.65 \text{ m}$	Livello Mare rispetto a LMM
$\gamma = 1.40$	
$G = 19.9 \text{ m}$	Larghezza Paratoia
$L_S = 6.4 \text{ m}$	Lunghezza del Compartimento delimitato dal Setto
$V_{EQ} = 174 \text{ m}^3$	volume aria in equilibrio
$p_{EQ} = 1.26 \text{ bar} = 126000 \text{ N/m}^2$	pressione aria in equilibrio

Il valore approssimato risulta dunque:

$$V_F(\text{approx}) = \left[ \frac{101325 + 2.49 \cdot 1030 \cdot 9.81}{101325 + (11 + 0.65) \cdot 1030 \cdot 9.81} \right]^{\frac{1}{1.4}} \cdot V_{EQ} = \left[ \frac{101325 + 25160}{101325 + 117715} \right]^{0.714} \cdot V_{EQ} = 0.676 \cdot V_{EQ}$$

Per cui


$$V_F(\text{approx}) = 117.6 \text{ m}^3$$

Il valore esatto derivante dalla equazione di secondo grado richiede ulteriori valori:

$$V_F = 113.9 \text{ m}^3$$

La differenza tra la valutazione esatta e quella approssimata è circa del 3%, per cui potremo semplificare il calcolo ponendo:

$$V_F \approx 0.97 \cdot \left[ \frac{p_A + h \cdot \rho \cdot g}{p_A + (d + H) \cdot \rho \cdot g} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_{EQ} = 0.97 \cdot \left[ \frac{p_{EQ}}{p_F} \right]^{\frac{1}{\gamma}} \cdot V_{EQ}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 13
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Completiamo ora l'analisi termodinamica calcolando la variazione di temperatura nell'aria compressa.

Dalla legge dei gas perfetti, inizialmente e a fine moto si ha:

$$T_{EQ} = \frac{p_{EQ} \cdot V_{EQ}}{\mu \cdot R}$$

$$T_F = \frac{p_F \cdot V_F}{\mu \cdot R}$$

Il numero di moli non cambia per ipotesi.

Pertanto:

$$\frac{T_F}{T_{EQ}} = \frac{p_F \cdot V_F}{p_{EQ} \cdot V_{EQ}} = \frac{p_F}{p_{EQ}} \cdot 0.97 \cdot \left[ \frac{p_{EQ}}{p_F} \right]^{\frac{1}{\gamma}} = 0.97 \cdot \left[ \frac{p_F}{p_{EQ}} \right]^{1-\frac{1}{\gamma}} = 0.97 \cdot \left[ \frac{p_A + (d+H) \cdot \rho \cdot g}{p_A + h \cdot \rho \cdot g} \right]^{1-\frac{1}{\gamma}}$$


Con i valori di cui sopra

$$\frac{T_F}{T_{EQ}} = 1.13$$

Essendo la temperatura espressa in °K si ha (ipotizzando la partenza a temperatura ambiente 20°C):

$$T_F - T_{EQ} = 38^\circ\text{K} = 38^\circ\text{C}$$

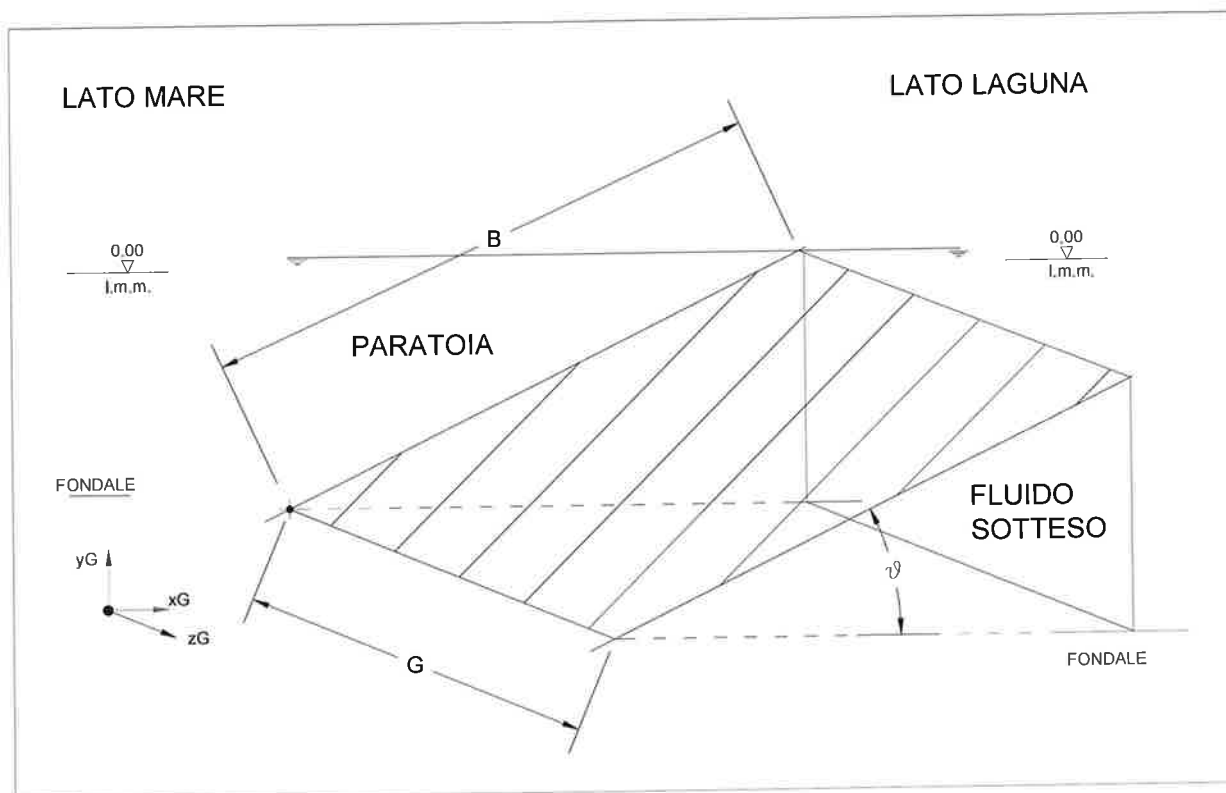
L'ipotesi per la quale l'aria si trova a temperatura ambiente è solo indicativa: essendo la posizione di partenza ottenuta per decompressione la temperatura può essere inferiore a quella ambiente nel caso in cui l'abbattimento inizi dopo un tempo breve.

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 14
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 6 EQUAZIONE E PARAMETRI CORRELATI

### 6.1 DEFINIZIONE DEL SISTEMA

Per prima cosa definiamo il "sistema" in considerazione ed i suoi limiti.



In base alla figura precedente consideriamo come nostro sistema:


- la paratoia
- il fluido sotteso dalla paratoia, cioè compreso tra essa ed il fondale

Il moto della paratoia tende ad espellere il fluido attraverso le superfici frontale e laterale, come sarà discusso in par. 9, riducendo progressivamente il volume di fluido sotteso.

Il fluido uscente dal volume sotteso viene incorporato nel fluido circostante; le proprietà idrodinamiche di entrambi ne saranno dunque modificate, in un processo considerato irreversibile.

Dunque il fluido uscente, una volta fuori dal sistema, si ritiene disconnesso dal sistema stesso e cioè non più in grado di interagire con esso e di restituirgli (eventualmente) la sua energia; la sua energia cinetica sarà convertita in energia cinetica e potenziale del fluido circostante (per esempio accelerando le particelle e provocando onde di livello) ed il lavoro compiuto dalla pressione del fluido circostante influenzerà solo la energia cinetica del fluido uscente (rallentandolo).

Si considera che lo stato meccanico del sistema sia descritto completamente dalla coordinata angolare  $\theta$ .

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 15
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 6.2 EQUAZIONE

Il moto di un sistema attorno ad un centro di rotazione obbedisce alla equazione generale (cfr. Rif. [G.1] e par. 10):

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T = N(\theta)$$

Dove:

- $\theta(t)$     angolo di rotazione
- $t$         tempo
- $T$         energia cinetica del sistema
- $N$         momento delle forze esterne agenti sul sistema

L'equazione di cui sopra, nella sola variabile  $\theta$ , riflette la ipotesi per cui lo stato meccanico del sistema sia descritto completamente dalla coordinata angolare  $\theta$ .

In par. 6.1 si è riconosciuto come "sistema" l'insieme della paratoia e del fluido sotteso; pertanto possiamo scrivere:

$$T = T_P + T_F$$

$$N = N_P + N_F$$

dove i pedici "P" ed "F" si riferiscono rispettivamente alle proprietà relative alla Paratoia e al Fluido sotteso.

Pertanto l'equazione prende la forma:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F = N_P(\theta) + N_F(\theta)$$

L'equazione di cui sopra è completata dalle condizioni iniziali:

$$\theta(t = 0) = \theta_0 = \theta_{EQ}$$

$$\left. \frac{d\theta}{dt} \right|_{t=0} = \dot{\theta}_0 = 0$$


Nel nostro caso, iniziando il moto da una posizione di equilibrio statico la velocità angolare iniziale si può ritenere nulla.

Si deve osservare che nell'equazione tutte le grandezze non si considerano dipendenti esplicitamente dal tempo: la loro dipendenza dal tempo è solo tramite  $\theta$ .

La complessità formale delle espressioni che esprimono i termini relativi alla equazione rende graficamente impraticabile la stesura completa della equazione di cui sopra.

Verranno pertanto sviluppate separatamente in forma esplicita le espressioni dei singoli termini dell'equazione, restando inteso che l'equazione finale è determinata dalla somma dei contributi individuali.

Le espressioni delle proprietà relative alla paratoia ed al fluido sono ricavate nei paragrafi 7 e 8.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 16
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 6.3 ELEMENTI TRASCURATI NELL'EQUAZIONE

Più in generale rispetto a quanto enunciato in par. 6.2, il moto del sistema obbedisce alla seguente equazione:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{dU}{dt} = \frac{dW}{dt} + \frac{dQ}{dt}$$

Ove i termini sono:

T energia cinetica del sistema (considerata in par. 6.2)

W lavoro compiuto dalle forze esterne (considerato in par. 6.2 tramite il momento N)

U energia interna del sistema (non considerata in par. 6.2)

Q energia cinetica aggiunta al sistema (non considerata in par. 6.2)

Si noti infatti che durante il moto:

- Gli effetti termodinamici (compressione adiabatica) sull'aria contenuta nella paratoia (cfr. par. 5) producono un incremento dell'energia interna misurata dall'incremento della temperatura. La maggior parte del lavoro necessario per la compressione è compiuto dalla pressione idrostatica esterna, ma parte anche dalla paratoia, attraverso la velocità radiale impressa dal moto rotatorio alle particelle fluide (si veda anche il punto ).
- al sistema si aggiunge massa dall'esterno (acqua in zavorra), che entra a velocità non nulla e stabilita dalla fluidodinamica delle bocche di entrata. Pertanto nel sistema (ed in particolare nella paratoia) oltre alla massa (tenuta in conto dalla variazione di momento di inerzia di massa) entra anche energia cinetica; data però la posizione delle bocche di entrata (situate sul lato inferiore della paratoia) la quantità di moto introdotta è contraria a quella posseduta dalla paratoia in abbattimento. Pertanto parte del lavoro compiuto dai momenti delle forze agenti sarà destinato a modificare il momento della quantità di moto introdotto.
- Noi supponiamo che la massa fluida sia equilibrio statico all'interno della paratoia, il che equivale ad ipotizzare che la pressione dell'aria intrappolata fornisca sempre la forza centripeta necessaria a impedire il moto radiale del fluido mantenendolo in moto esclusivamente rotatorio. D'altra parte l'acqua comprime l'aria, e dunque è in moto (lento) dall'asse di rotazione verso la periferia; parte (qualche per cento della velocità) di questo moto è provocato anche dalla rotazione della paratoia stessa.


Gli effetti di cui sopra rivestono un ruolo secondario sul moto, e vengono trascurati.

Per cui:

$$\frac{dT}{dt} = \frac{dW}{dt}$$

che dà luogo all'equazione descritta al par. 6.2.



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 17
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 7 TERMINI DELL'EQUAZIONE RELATIVI AL MOTO DELLA PARATOIA

Consideriamo in questo paragrafo i termini dell'equazione:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F = N_P(\theta) + N_F(\theta)$$


legati moto della Paratoia, e cioè:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P \quad (\text{TERMINE CINETICO})$$

$$N_P(\theta) \quad (\text{MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE})$$

Le espressioni dettagliate per il termine cinetico sono ricavate nei par. 7.1.

Il termine di forza  $N_P(\theta)$  momento delle forze agenti sulla paratoia viene ricavato al par. 7.2.

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 18
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 7.1 TERMINE CINETICO

Il termine cinetico connesso col moto della paratoia è espresso da:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P$$

L'energia cinetica della paratoia  $T_P$  è espressa da:

$$T_P = \frac{1}{2} J(\theta) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^2$$

Il momento di inerzia di massa  $J$  tiene conto della massa complessiva associata alla paratoia.

Si deve osservare che nell'espressione di  $T_P$  il momento d'inerzia  $J$  non è costante, poiché il suo valore dipende dal volume occupato dall'acqua contenuta all'interno della paratoia, che è variabile con la posizione angolare  $\theta$  e quindi col tempo.


In realtà si tratta di una correzione piuttosto modesta, ma ne terremo conto comunque.

Il momento di inerzia  $J$  dipende appunto dalla posizione angolare  $\theta$  ma non esplicitamente dal tempo, per cui dipende da  $t$  solo tramite  $\theta$ .

Pertanto risulta:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P = J(\theta) \cdot \frac{d^2 \theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

Allo scopo di semplificare i calcoli il momento di inerzia di massa viene determinato considerando il contributo della cassa completamente piena d'acqua e deducendone la quota complementare della parte in realtà occupata dall'aria.

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 19
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Pertanto il momento d'inerzia di massa complessivo del sistema J è composto come segue:

$$J = J_S + (J_Z - J_A) + J_{AGG}$$

Ove:

$J_S$  momento d'inerzia della struttura in acciaio, indipendente da  $\theta$

$J_Z$  momento d'inerzia della zavorra che riempie completamente la paratoia, indipendente da  $\theta$

$J_A$  momento d'inerzia complementare del volume d'acqua paria quello occupato dall'aria, dipende da  $\theta$

$J_{AGG}$  momento d'inerzia della massa aggiunta, indipendente da  $\theta$

A sua volta ciascuna componente  $J_i$  ( $i=S, Z, A, AGG$ ) è data da due contributi:

$$J_i = J_{C_i} + M_i \cdot R_i^2$$


$J_{C_i}$  momento d'inerzia attorno all'asse parallelo all'asse di rotazione ma passante per il baricentro della massa

$M_i$  massa

$R_i$  distanza del baricentro dall'asse di rotazione

Tenuto conto che solo  $J_A$  dipende dall'angolo  $\theta$  si ha che:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P = [J_S + J_Z - J_A + J_{AGG}] \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} - \frac{1}{2} \frac{\partial J_A}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 20
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 7.1.1 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA DELLA STRUTTURA IN ACCIAIO

Per la struttura della paratoia tutte le proprietà sono determinate, per cui è noto complessivamente il momento di inerzia di massa rispetto all'asse di rotazione  $J_S$ .

### 7.1.2 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA DELLA ZAVORRA COMPLETA

Per la zavorra sono noti

$M_Z$

$$u_Z(L) = [x_Z(L), y_Z(L)] \Rightarrow R_Z^2 = [x_Z(L)]^2 + [y_Z(L)]^2$$

E cioè il valore e le coordinate locali del COG della massa della zavorra che occupa interamente il volume disponibile all'interno della paratoia.

Per il calcolo di  $J_{C_Z}$  (momento d'inerzia attorno al COG) si adotta lo schema semplificato riportato in figura, per cui la massa che andrebbe a riempire completamente la paratoia  $M_Z$  (nota) viene distribuita uniformemente nel rettangolo di lati:

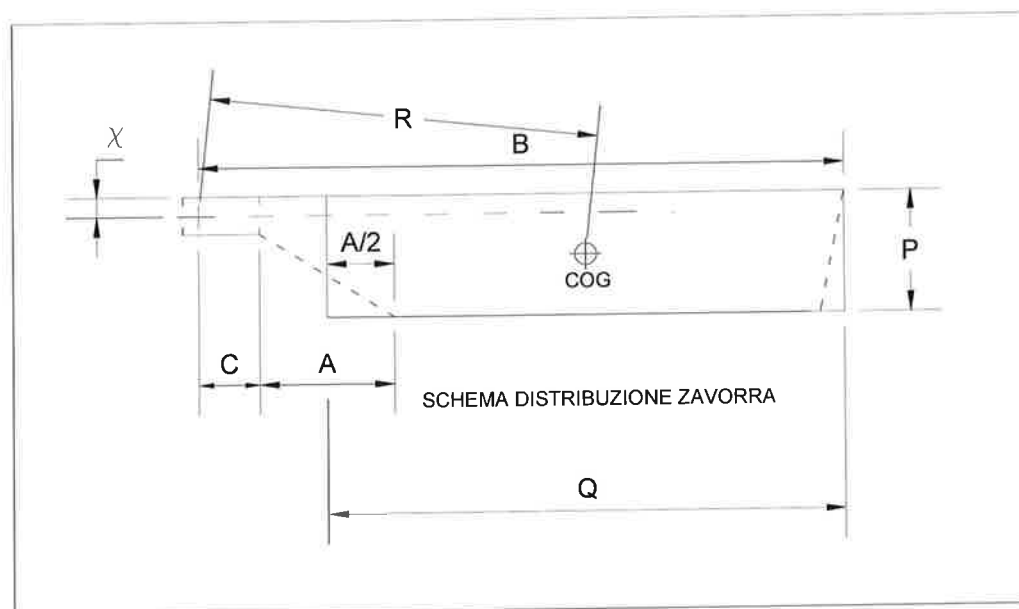
$$Q = B - \left( C + \frac{A}{2} \right) \quad (\text{lato orizzontale in figura}); \quad P \quad (\text{lato verticale in figura})$$

In tal caso si ha:

$$J_{C_Z} = \frac{1}{12} \cdot M_Z \cdot (Q^2 + P^2)$$

Dunque il momento d'inerzia di massa complessivo della zavorra potrebbe essere calcolato secondo la formula:

$$J_Z = J_{C_Z} + M_Z \cdot R_Z^2$$



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 21
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

E' lecito però porre il problema se sia corretto tenere conto di  $J_{C_z}$  nel calcolo del momento di inerzia di massa della zavorra.

Consideriamo il moto rotatorio attorno al proprio asse di un contenitore cilindrico contenente fluido, a partire da velocità angolare nulla fino ad un valore arbitrario e costante; si vede che:

- un fluido idealmente non viscoso rimane in quiete rispetto ad un sistema di riferimento inerziale esterno, mentre si trova in moto rispetto alle pareti del contenitore; in questo caso il suo momento di inerzia di massa (attorno all'asse di rotazione che passa per il suo centro di massa) è esattamente nullo;
- un fluido viscoso si mette in moto rotatorio progressivamente ed eguaglia a regime la rotazione del contenitore dopo un tempo che dipende dalla sua viscosità; in questo caso il momento di inerzia del fluido è regolato dalla viscosità, e comunque risulta molto inferiore a quello che si ottiene considerando la sua massa come un corpo rigido.

L'esempio riportato rappresenta un caso estremo e vale solo per contenitori con asse di simmetria che coincide con l'asse di rotazione; comunque evidenzia che il momento di inerzia della massa fluida, in generale, non può essere trattato allo stesso modo di quanto comunemente si fa con le masse rigide.

Tuttavia nel nostro caso specifico la sezione del contenitore ha forma allungata, contiene delle strutture interne e le sue pareti sono dotate di setti e nervature che ostacolano il moto relativo tra il contenitore ed il fluido, anche in assenza di viscosità.

Pertanto, considerando un moto rotatorio della paratoia attorno all'asse passante per il centro di massa della zavorra, si può ritenere ragionevolmente che solo una parte del fluido si troverà nelle condizioni del caso ideale menzionato in precedenza, una sorta di nocciolo cilindrico attorno all'asse, delimitato dall'altezza della paratoia depurato di ogni protuberanza interna.

Tale nocciolo risulta di modesta estensione, e tutto concentrato a breve distanza dall'asse di rotazione, pertanto il suo contributo al momento di inerzia di massa è in ogni caso piccolo.

A seguito delle considerazioni precedenti, e senza ulteriori disamine, si terrà conto degli effetti della circolazione relativa della zavorra rispetto alla paratoia deducendo conservativamente da  $J_{C_z}$  il momento di inerzia di un cilindro di lunghezza pari alla larghezza della paratoia e di diametro pari alla sua altezza:

$$J_{C_z}(\text{circ}) = \frac{\pi}{2} \cdot \rho \cdot G \cdot \left(\frac{P}{2}\right)^4$$

Pertanto con la presente correzione risulta:

$$J_z = J_{C_z} - J_{C_z}(\text{circ}) + M_z \cdot R_z^2$$

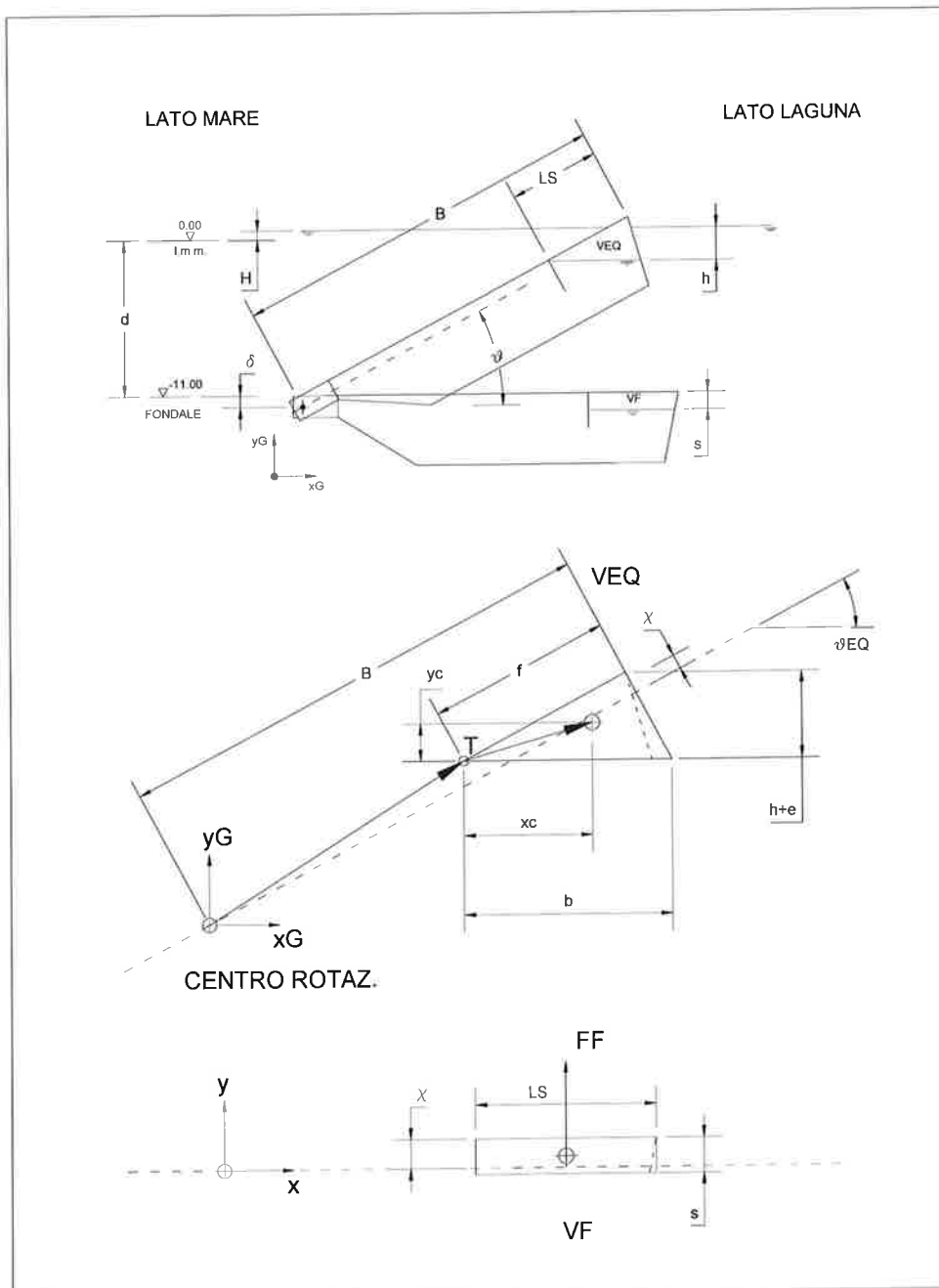
	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 22
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	


### 7.1.3 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA COMPLEMENTARE (ARIA)

In questo paragrafo si calcola il momento d'inerzia di massa  $J_A$  relativa al volume occupato dall'aria, come se fosse riempito d'acqua;  $J_A$  (che risulta variabile) sarà nell'equazione dedotto da  $J_Z$  (costante) calcolato al par. 7.1.2 per ottenere il momento d'inerzia della zavorra effettivamente contenuta nella paratoia.

Il calcolo (si veda figura) viene condotto considerando retto l'angolo della paratoia al vertice superiore, pertanto con modeste approssimazioni risulta:

- la sezione inizialmente occupata dall'aria è un triangolo rettangolo ( $V_{EQ}$ );
- la sezione occupata alla fine dall'aria è un rettangolo ( $V_F$ );



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 23
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### SEZIONE TRIANGOLARE INIZIALE

Il lato orizzontale del triangolo si calcola considerando il volume all'equilibrio:

$$V_{EQ} = \left[ \frac{1}{2} b \cdot (h + e) \right] \cdot G$$

G larghezza paratoia

Pertanto (cfr. figura):

$$b = 2 \cdot \frac{V_{EQ}}{(h + e) \cdot G} \quad \text{lunghezza lato orizzontale triangolo}$$

$$f = b \cdot \cos \theta_{EQ} \quad \text{lunghezza lato triangolo sulla paratoia lato mare}$$

$\theta_{EQ}$  angolo all'equilibrio (iniziale)

Come per es. da tabelle Roark, Rif. [G.3] Tab. A.1-11 si ha:

$$x_C = \frac{2}{3} b$$

$$y_C = (h + e) - \frac{2}{3} (h + e) = \frac{1}{3} (h + e)$$


$$J_{CA}(EQ) = \frac{1}{36} \cdot \rho \cdot G \cdot \left[ b^3 \cdot (h + e) + b \cdot (h + e)^3 \right] = \frac{1}{36} \cdot \rho \cdot G \cdot b \cdot (h + e) \cdot \left[ b^2 + (h + e)^2 \right]$$

essendo

$$V_{EQ} = G \cdot \left[ \frac{1}{2} \cdot b \cdot (h + e) \right]$$

$$b = 2 \cdot \frac{V_{EQ}}{(h + e) \cdot G}$$

$$J_{CA}(EQ) = \frac{1}{18} \cdot \rho \cdot V_{EQ} \cdot \left[ b^2 + (h + e)^2 \right] = \frac{1}{18} \cdot \rho \cdot V_{EQ} \cdot \left[ \left( 2 \cdot \frac{V_{EQ}}{(h + e) \cdot G} \right)^2 + (h + e)^2 \right]$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 24
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

La posizione del centro di massa rispetto al centro di rotazione è calcolata facendo uso di elementari metodi di calcolo vettoriale.

Il punto (indicato con T in figura) da cui è misurata la posizione del COG del triangolo è posizionato al vertice inferiore sinistro del triangolo.

Da tale punto il vettore che porta al COG è:

$$\underline{u}_C = (x_C, y_C) \quad x_C \text{ e } y_C \text{ dati sopra}$$

La posizione di T rispetto al centro di rotazione nel sistema locale della paratoia è espressa dal vettore:

$$\underline{u}_T(L) = (B - f, \chi)$$

La posizione del punto T con la paratoia ruotata all'equilibrio e nel sistema globale è data da:

$$\underline{u}_T(GL) = \underline{K}(\theta_{EQ}) \cdot \underline{u}_T(L)$$

dove la matrice  $\underline{K}$  di trasformazione è (ridotta alle sole componenti x e y):

$$\underline{K}(\theta_{EQ}) = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{EQ}) & -\sin(\theta_{EQ}) \\ \sin(\theta_{EQ}) & \cos(\theta_{EQ}) \end{bmatrix}$$

Quindi il vettore posizione di T globale è:

$$\underline{u}_T = (x_T, y_T)$$

$$x_T = (B - f) \cos \theta_{EQ} - \chi \sin \theta_{EQ}$$

$$y_T = (B - f) \sin \theta_{EQ} + \chi \cos \theta_{EQ}$$

Pertanto la posizione del COG rispetto al centro di rotazione risulta:

$$\underline{u}(\theta_{EQ}) = \underline{u}_T + \underline{u}_C = (x_T, y_T) + (x_C, y_C)$$


La distanza cercata è dunque:

$$R_A(EQ) = \sqrt{(\underline{u}_T + \underline{u}_C) \cdot (\underline{u}_T + \underline{u}_C)}$$

Pertanto il momento d'inerzia complementare all'equilibrio risulta:

$$J_A(EQ) = J_{C_A}(EQ) + \rho \cdot V_{EQ} \cdot R_A^2(EQ)$$



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 25
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### SEZIONE RETTANGOLARE FINALE

Nella posizione finale si suppone per semplicità che l'aria occupi un rettangolo di lati  $L_S$  (geometricamente determinato) ed  $s$  (determinato dal calcolo di par. 5).

Sempre con riferimento alle tabelle di Roark 7th Ed. Tab. A.1-11 si ha:

$$J_{C_A}(F) = \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot G \cdot (L_S \cdot s^3 + s \cdot L_S^3) = \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot V_F \cdot (s^2 + L_S^2)$$

ove  $V_F$  rappresenta il volume finale come determinato in par. 5.

La distanza dal centro di rotazione del centro di massa è ora:

$$R_A(F) = \sqrt{\left(B - \frac{L_S}{2}\right)^2 + \left(\frac{s}{2} - \chi\right)^2}$$

Pertanto il momento d'inerzia complementare finale risulta:

$$J_A(F) = J_{C_A}(F) + \rho \cdot V_F \cdot R_A^2(F)$$


Il momento d'inerzia di massa  $J_A$  varia dalla posizione iniziale a quella finale.

Per semplicità nel calcolo dinamico si suppone che la variazione sia lineare con l'angolo, ossia:

$$J_A(\theta) = J_A(EQ) + \frac{J_A(F) - J_A(EQ)}{\theta_{EQ}} (\theta_{EQ} - \theta)$$

Pertanto il coefficiente  $\frac{dJ_A}{d\theta}$  che appare nel termine cinetico (cfr. par. 7.1) è dato da:

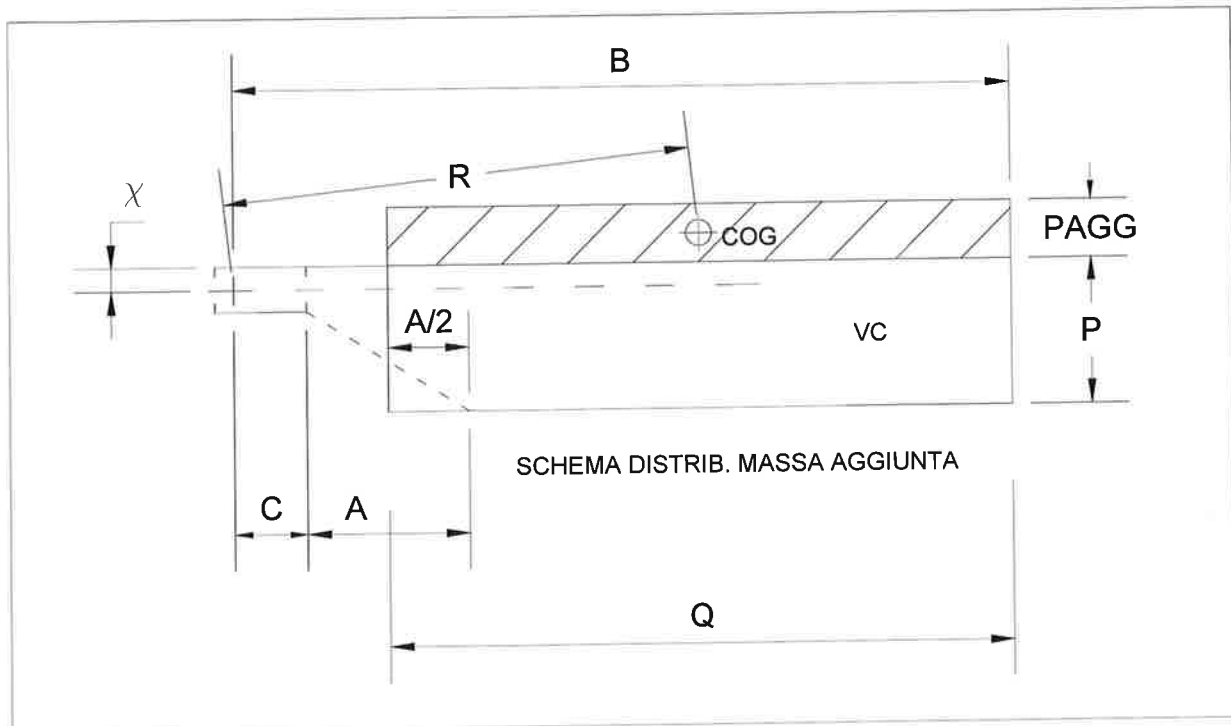
$$\frac{d}{d\theta} J_A = \frac{d}{d\theta} \left[ J_A(EQ) + \frac{J_A(F) - J_A(EQ)}{\theta_{EQ}} (\theta_{EQ} - \theta) \right] = - \frac{J_A(F) - J_A(EQ)}{\theta_{EQ}} = \frac{J_A(EQ) - J_A(F)}{\theta_{EQ}}$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 26
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

#### 7.1.4 MOMENTO D'INERZIA DI MASSA AGGIUNTA

La dinamica del fluido sotteso è trattata in dettaglio ai parr. 8 e 9.

Il comportamento del fluido sovrastante la paratoia è schematizzato più semplicemente considerando un termine di massa aggiunta per il calcolo si fa riferimento alla figura.



Si ipotizza che la massa aggiunta sia distribuita come in figura, e cioè uniformemente sul lato superiore della cassa equivalente, come stabilita in par. 7.1.2, il cui volume  $V_C$  è:

$$V_C = Q \cdot P$$


La massa aggiunta è in generale definita come:

$$M_{AGG}(\text{gen}) = C_{AGG} \cdot V_C \cdot \rho$$

Ove il coefficiente di massa aggiunta  $C_{AGG}$  misura quanta parte del volume in moto della cassa ( $V_C$ ) si debba considerare in moto nell'ambiente fluido che circonda la cassa stessa.

Se non si considerasse in dettaglio il comportamento fluidodinamico della parte inferiore, potremmo ritenere che globalmente e conservativamente:

$$1 \leq C_{AGG} \leq 2$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 27
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Pertanto dovendo considerare solo la parte sovrastante si pone:

$$M_{AGG} = \frac{1}{2} C_{AGG} \cdot V_C \cdot \rho$$

Nell'ipotesi di distribuzione di cui sopra risulta:

$$P_{AGG} = \frac{\frac{1}{2} C_{AGG} \cdot V_C}{Q \cdot G}$$

In tal caso si ha (Rif. [G.3] Tab. A.1-11):

$$J_{C_{AGG}} = \frac{1}{12} \cdot \rho \cdot G \cdot [P_{AGG} \cdot Q^3 + Q \cdot (P_{AGG})^3]$$

Il COG della massa aggiunta si trova alla distanza dall'asse di rotazione:

$$R_{AGG} = \sqrt{\left(B - \frac{Q}{2}\right)^2 + \left(\frac{P_{AGG}}{2} + \chi\right)^2}$$

Dunque il momento d'inerzia di massa complessivo della massa aggiunta è calcolato secondo la formula:


$$J_{AGG} = J_{C_{AGG}} + M_{AGG} \cdot R_{AGG}^2$$

Per un confronto con i risultati dell'analisi fluidodinamica della massa d'acqua sottesa (par. 8.1) è utile calcolare esplicitamente  $J_{AGG}$  per la paratoia di Chioggia; con i parametri geometrici di cui al par. 4, ed adottando:

$$C_{AGG} = 1$$

Si ottiene:

$$J_{AGG} = 3.5 \cdot 10^8 \text{ kg}_M \cdot \text{m}^2$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 28
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 7.2 MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE

La massa d'acqua contenuta nella cassa della paratoia è variabile durante il moto, dunque varia anche il momento dovuto al suo peso.

In modo analogo la paratoia inizialmente ha una parte emersa, dunque la sua spinta idrostatica varia fino all'istante in cui la paratoia si immerge completamente.

Allo scopo di semplificare i calcoli si considera:

- il contributo di peso della cassa completamente piena d'acqua e deducendone la quota complementare della parte in realtà occupata dall'aria;
- il contributo di spinta della cassa completamente immersa e deducendone la quota complementare della parte emersa;

Il momento delle forze agenti complessivo sul sistema N si può considerare dunque composto come segue:

$$N = N_S + (N_Z + N_A) + (N_B + N_{BE})$$

Ove:

$N_S$  momento dovuto al peso in aria della struttura in acciaio

$N_Z$  momento dovuto al peso in aria della zavorra che riempie completamente la paratoia

$N_A$  momento complementare dovuto al peso in aria di un volume d'acqua paria quello occupato dall'aria

$N_B$  momento dovuto alla spinta idrostatica sulla paratoia completamente immersa

$N_{BE}$  momento dovuto alla spinta idrostatica sulla parte emersa della paratoia


I momenti verranno calcolati in senso algebrico, dotati quindi di un segno opportuno determinato dalla forza che li genera.

All'equilibrio:

$$N_S + (N_Z + N_A) + (N_B + N_{BE}) = 0$$

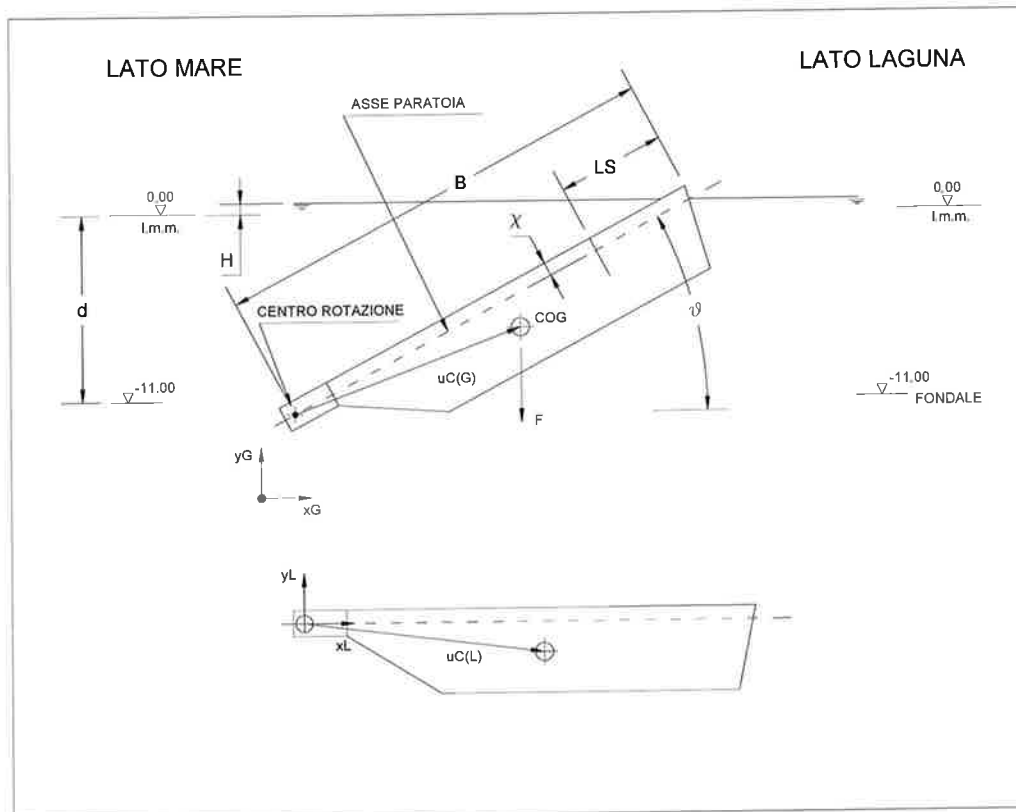
$$N_{BE} = -[N_S + (N_Z + N_A) + N_B]$$

Pertanto il momento di spinta complementare sarà determinato per differenza degli altri termini, in tal modo "rettificando" l'equilibrio rispetto alle inevitabili approssimazioni di calcolo.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 29
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 7.2.1 MOMENTO DOVUTO AL PESO DELLA STRUTTURA IN ACCIAIO

Lo schema delle forza/momento è rappresentato in figura:



Per la struttura della paratoia tutte le proprietà sono determinate.

Si suppone pertanto di conoscere:


$\underline{u}_C(L)$  vettore posizione del COG nel sistema di riferimento locale di figura

$M_S$  massa totale della struttura

Pertanto la forza agente è vettorialmente:

$$\underline{F}_S = -g \cdot M_S \cdot \underline{j}$$

$\underline{j}$  versore in direzione verticale y.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 30
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Il momento attorno all'asse di rotazione z è sempre vettorialmente:

$$\underline{N}_S = \underline{u}_C(\underline{GL}) \times \underline{F}_S$$

D'altra parte la posizione del COG nel sistema globale è data da:


$$\underline{u}_C(\underline{GL}) = \underline{K} \bullet \underline{u}_C(\underline{L})$$

Dove la matrice  $\underline{K}$  di trasformazione è (ridotta alle sole componenti x e y):

$$\underline{K}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

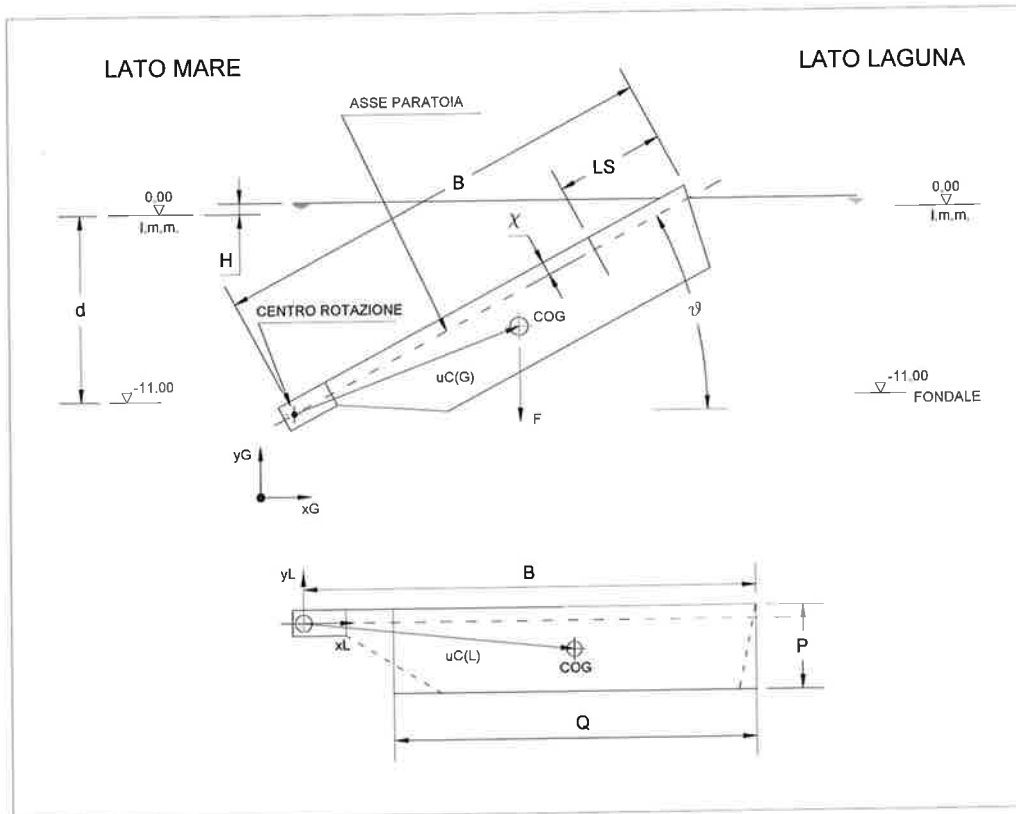
Pertanto risulta:

$$\underline{N}_S = [\underline{K}(\theta) \bullet \underline{u}_C(\underline{L})] \times \underline{F}_S$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 31
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 7.2.2 MOMENTO DOVUTO AL PESO DELLA ZAVORRA COMPLETA

Lo schema delle forza/momento è rappresentato in figura:



Da par. 7.1.2 conosciamo la posizione del COG della zavorra:

$\underline{u}_C(L)$  vettore posizione del COG nel sistema di riferimento locale di figura

$$x(L) = \left( B - \frac{Q}{2} \right)$$

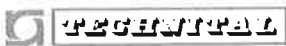
$$y(L) = -\left( \frac{P}{2} - \chi \right)$$

$M_Z$  massa della zavorra quando riempie completamente la paratoia

Come nel par. 7.2.1 la forza agente e il momento sono vettorialmente:

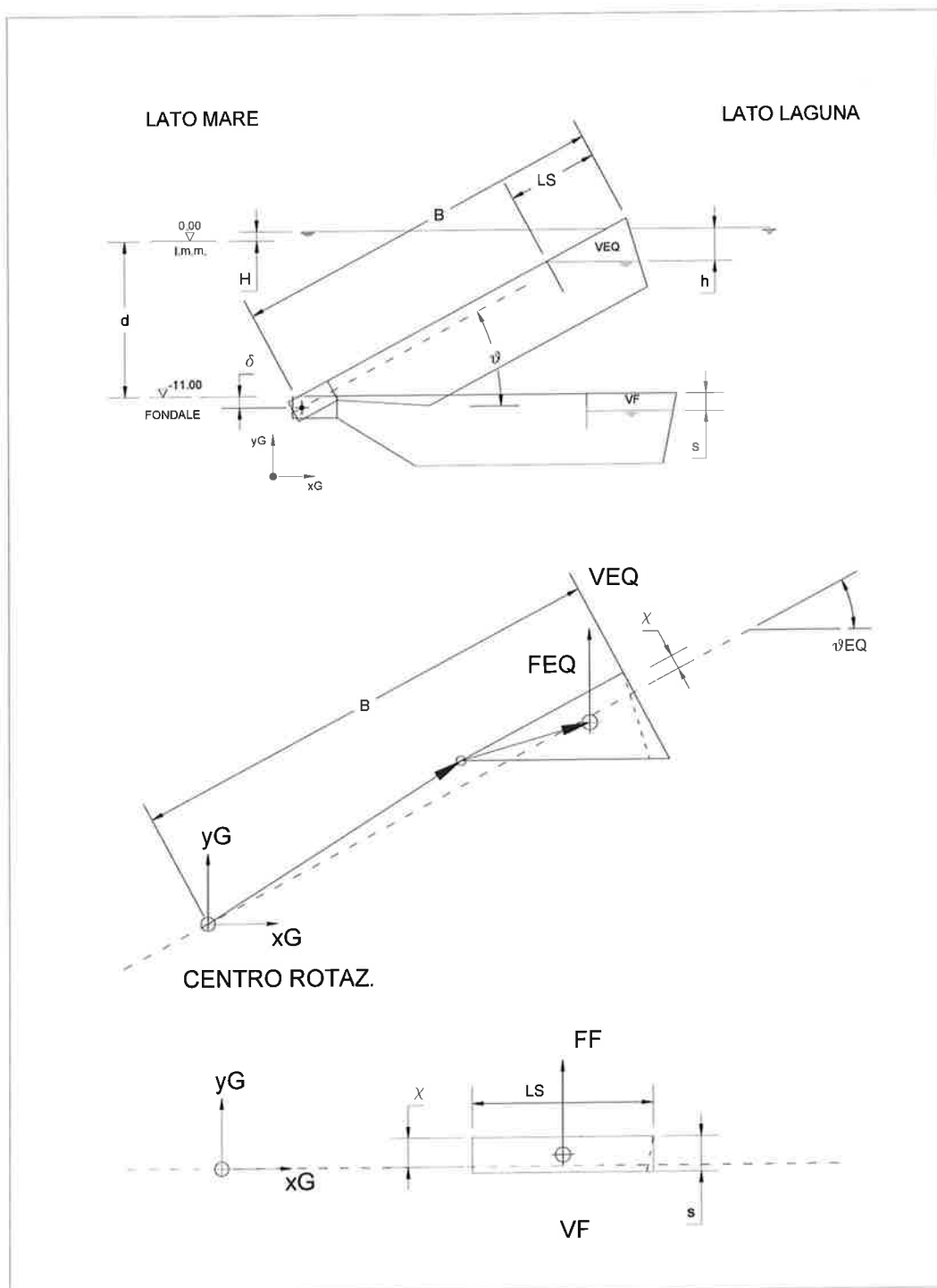
$$\underline{F}_Z = -g \cdot M_Z \cdot \underline{j}$$

$$\underline{N}_Z = \left[ \underline{K}(\theta) \bullet \underline{u}_C(L) \right] \times \underline{F}_Z$$


	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 32
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 7.2.3 MOMENTO COMPLEMENTARE DELLA BOLLA D'ARIA

Analogamente a quanto fatto al par. 7.1.3 si calcolano i momenti relativi alle posizioni iniziale e finale, secondo lo schema delle forza/momento è rappresentato in figura:





	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 33
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### **POSIZIONE INIZIALE (EQUILIBRIO)**

Da par. 7.1.3 conosciamo la posizione del COG della spinta complementare nella posizione iniziale (di equilibrio):

$$\underline{u}(\theta_{EQ}) = \underline{u}_T + \underline{u}_C = (x_T, y_T) + (x_C, y_C) \quad \text{vettore posizione del COG nel sistema di riferimento Globale}$$

Analogamente a par. 7.2.1 la forza agente è vettorialmente:

$$\underline{F}_A(EQ) = +g \cdot \rho \cdot V_{EQ} \cdot \underline{j}$$

$$\underline{N}_A(EQ) = \underline{u}(EQ) \times \underline{F}_A(EQ)$$

### **POSIZIONE FINALE**

Si noti che nella posizione finale i due sistemi locale-globale coincidono.

Da par. 7.1.3 conosciamo la posizione del COG della spinta complementare nella posizione finale:

$$\underline{u}(\theta_F = 0) = \underline{u}_C = (x_C(F), y_C(F))$$

$$x_C(F) = \left( B - \frac{L_S}{2} \right)$$

$$y_C(F) = \chi - \frac{S}{2}$$

Analogamente a par. 7.2.1 la forza agente è vettorialmente:

$$\underline{F}_A(F) = +g \cdot \rho \cdot V_F \cdot \underline{j}$$

$$\underline{N}_A(F) = \underline{u}(F) \times \underline{F}_A(F)$$

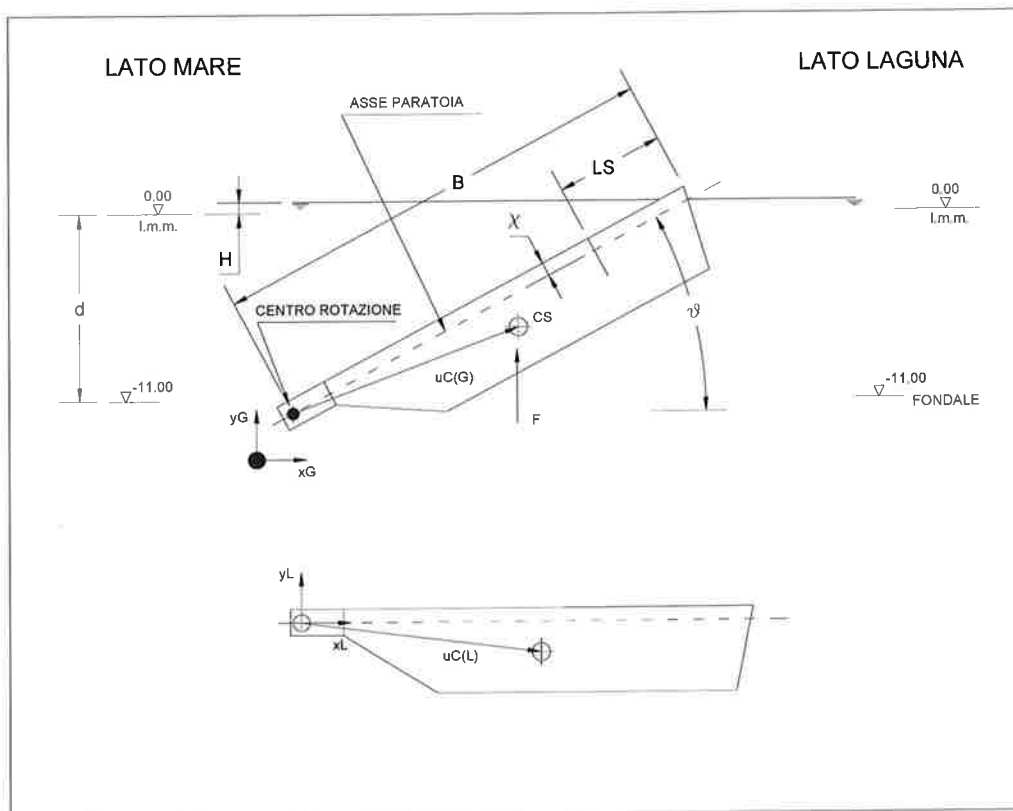
Il momento complementare varia dalla posizione iniziale a quella finale.

Per semplicità nel calcolo dinamico si suppone che la variazione sia lineare con l'angolo, ossia:

$$N_A(\theta) = N_A(EQ) + \frac{N_A(F) - N_A(EQ)}{\theta_{EQ}} (\theta_{EQ} - \theta)$$

### 7.2.4 MOMENTO DOVUTO ALLA SPINTA IDROSTATICA

Lo schema delle forza/momento è rappresentato in figura:



Per la struttura della paratoia tutte le proprietà sono determinate, si suppone pertanto di conoscere:

$\underline{u}_C(L)$  vettore posizione del Centro di Spinta CS nel sistema di riferimento locale di figura

$V_S$  volume totale della struttura


Come nel par. 7.2.1 la forza agente è vettorialmente:

$$\underline{F}_B = +\rho \cdot V_S \cdot \underline{j}$$

$$\underline{N}_B = [\underline{K}(\theta) \bullet \underline{u}_C(L)] \times \underline{F}_B$$

Si deve notare che, per come si è definito il sistema in par. 6.1, la spinta idrostatica è in parte (quella relativa alla faccia inferiore della paratoia) dovuta in verità ad azioni interne tra paratoia e fluido sotteso.

Questa incongruenza – dettata dalla necessità di mantenere una continuità di concetti con l'analisi statica – sarà compensata dal modo in cui si calcoleranno le azioni esterne sulla massa fluida sottesa (par. 8.2).

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 35
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 7.2.5 MOMENTO COMPLEMENTARE DI SPINTA

L'emersione iniziale "e" contribuisce a determinare il volume immerso della paratoia e quindi la spinta idrostatica.

Tale parametro si presenta piuttosto modesto rispetto alle dimensioni della paratoia, pertanto:

- "e" avrà un effetto altrettanto modesto sulla spinta globale;
- "e" avrà effetti solo nelle primissime fasi del moto, in quanto ben presto la paratoia si immerge completamente

Per questi motivi le approssimazioni con le quali l'emersione iniziale viene trattata avranno effetti trascurabili.

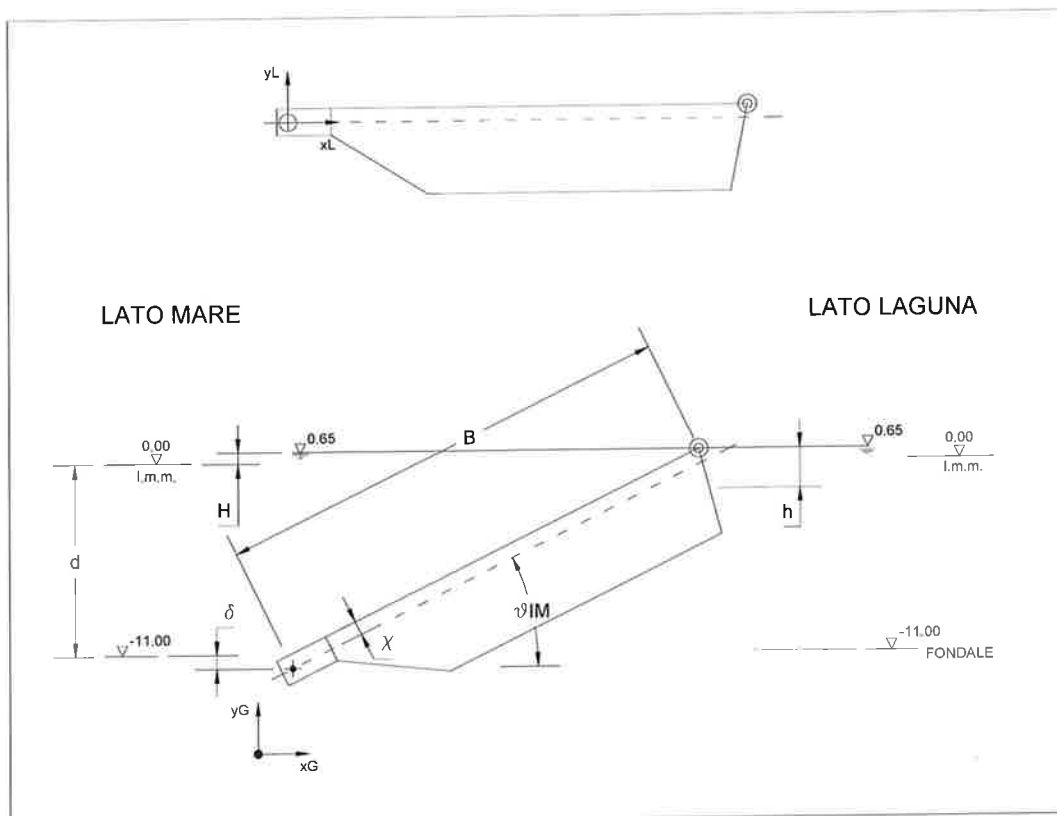
Come già anticipato il momento complementare della spinta  $N_{BE}$  è dovuto alla spinta idrostatica sulla parte emersa della paratoia.

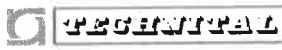
Esso viene calcolato all'equilibrio per differenza rispetto alle altre forze agenti, e cioè:

$$N_{BE} = -[N_S + (N_Z + N_A) - N_B]$$

Per il modo in cui è ricavato tale valore può non corrispondere esattamente al volume emerso; essenzialmente, tuttavia,  $N_{BE}$  deve avere segno opposto rispetto a  $N_B$ , ed in questo senso si applica un controllo.

Il calcolo dell'angolo di immersione  $\theta_{IM}$  si esegue facendo riferimento alla figura:



	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 36
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Nel sistema di riferimento locale la posizione dello spigolo estremo è:

$$\underline{u}_L = (B, \chi)$$

La posizione dello stesso punto nel sistema globale quando la paratoia è ruotata di  $\theta_{IM}$  è

$$\underline{\underline{K}}(\theta_{IM}) = \begin{bmatrix} \cos \theta_{IM} & -\sin \theta_{IM} \\ \sin \theta_{IM} & \cos \theta_{IM} \end{bmatrix}$$

Pertanto:

$$\underline{u}_G = \underline{\underline{K}}(\theta_{IM}) \cdot \underline{u}_L = \underline{\underline{K}}(\theta_{IM}) \cdot (B, \chi) = \begin{bmatrix} B \cdot \cos \theta_{IM} - \chi \cdot \sin \theta_{IM} \\ B \cdot \sin \theta_{IM} + \chi \cdot \cos \theta_{IM} \end{bmatrix}$$

La componente verticale del vettore posizione deve essere tale che:

$$B \cdot \sin \theta_{IM} + \chi \cdot \cos \theta_{IM} = \delta + d + H$$

Tale equazione dovrebbe essere risolta iterativamente per ottenere l'angolo esatto.

Essendo

$$\chi \ll B$$

riteniamo sufficiente il valore fornito alla seconda iterazione, ponendo:

$$B \cdot \sin \theta_{IM}(0) \approx \delta + d + H$$


$$\theta_{IM}(0) \approx \arcsen\left(\frac{\delta + d + H}{B}\right)$$

$$\theta_{IM} = \arcsen\left[\frac{\delta + d + H - \chi \cdot \cos \theta_{IM}(0)}{B}\right] = \arcsen\left[\frac{\delta + d + H - \chi \cdot \cos\left[\arcsen\left(\frac{\delta + d + H}{B}\right)\right]}{B}\right]$$

Il momento complementare  $N_{BE}$  si annulla per  $\theta_{IM}$ ; nelle posizioni intermedie si suppone ragionevolmente un andamento lineare, pertanto:

$$N_{BE}(\theta) = N_{BE}(EQ) - \frac{N_{BE}(EQ)}{\theta_{EQ} - \theta_{IM}} (\theta_{EQ} - \theta) \quad \theta_{EQ} \geq \theta \geq \theta_{IM}$$

$$N_{BE}(\theta) = 0 \quad \theta_{IM} \geq \theta$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 37
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 8 TERMINI DELL'EQUAZIONE RELATIVI AL MOTO DEL FLUIDO SOTTESO

Consideriamo in questo paragrafo i termini dell'equazione:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_P \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_P + \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F = N_P(\theta) + N_F(\theta)$$


legati al moto del fluido sotteso, e cioè:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F \quad (\text{TERMINE CINETICO})$$

$$N_F(\theta) \quad (\text{MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE})$$

L'espressione dettagliata del termine cinetico è ricavata al par. 8.1.

Il termine di forza  $N_F(\theta)$  momento delle forze agenti sulla paratoia viene discusso al par. 8.2.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 38
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 8.1 TERMINE CINETICO

Il termine cinetico dell'acqua sottesa si ottiene a partire dalla energia cinetica della massa fluida movimentata (cfr. par. 9) applicando il formalismo lagrangiano (cfr. par. 10).

Per brevità nelle espressioni che seguono denomineremo TC il termine cinetico, ossia:

$$TC \equiv \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T_F$$

Da par. 9 si ha che:

$$T_F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

Da quanto sopra si vede che:

$$T_F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \tau_F(\theta)$$

$$\tau_F(\theta) = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\}$$


Pertanto:

$$TC = \frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left[ \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \tau_F(\theta) \right] \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \tau_F(\theta) \right]$$

$$TC = \frac{d}{dt} \left[ (\dot{\theta}) \tau_F(\theta) \right] - \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta)$$

$$TC = \frac{d}{dt} \left[ (\dot{\theta}) \tau_F(\theta) \right] + (\dot{\theta}) \frac{d}{dt} [\tau_F(\theta)] - \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta)$$

$$TC = \frac{d^2 \theta}{dt^2} \tau_F(\theta) + \frac{d\theta}{dt} \left[ \frac{\partial \tau_F(\theta)}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right) \right] - \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \frac{\partial \tau_F(\theta)}{\partial \theta}$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 39
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$TC = \frac{d^2\theta}{dt^2} \tau_F(\theta) + \frac{1}{2} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \frac{\partial \tau_F(\theta)}{\partial \theta}$$

Dai calcoli dettagliati di par. 9 si ottiene:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta) &= \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot \left\{ [1 + 3\text{tg}^2(\theta)] \cdot (1 + \text{tg}^2(\theta)) \cdot \cos^6(\theta) - 6[\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^5(\theta) \text{sen}(\theta) \right\} \\ &+ \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \left\{ \left[ -\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} (1 + \text{tg}^2(\theta)) + 1 + \text{tg}^2(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right. \\ &\left. - 4 \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta) - 2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \right\} \end{aligned}$$


Pertanto il termine cinetico risulta:

TC =

$$\begin{aligned} &+ \frac{1}{24} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \cdot \rho \cdot B^2 \cdot G \cdot \left\{ \begin{array}{l} \text{GRAFA 1} \\ B^2 \cdot \left\{ [1 + 3\text{tg}^2(\theta)] \cdot (1 + \text{tg}^2(\theta)) \cdot \cos^6(\theta) - 6[\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^5(\theta) \text{sen}(\theta) \right\} \\ \left[ -\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} (1 + \text{tg}^2(\theta)) + 1 + \text{tg}^2(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ - 4 \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \\ - 2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \end{array} \right\} \\ &+ \frac{1}{12} \rho \cdot B^2 \cdot G \frac{d^2\theta}{dt^2} \left\{ \begin{array}{l} \text{GRAFA 2} \\ B^2 \cdot [\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{2} \cdot G^2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Si osserva che:

- Il termine cinetico ha una componente che dipende dalla sola velocità angolare (componente di trascinamento) ed uno che dipende solo dalla accelerazione angolare (componente inerziale). Questi due termini possono essere assimilati a effetti di drag e di massa aggiunta come nelle usuali trattazioni dei corpi in moto nei fluidi; per questa ragione la massa aggiunta esplicitamente considerata in par. 7.1.4 è stata calcolata senza considerare il fluido sotteso dalla paratoia;
- entrambi i termini che costituiscono il termine cinetico dipendono dalla posizione angolare

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 40
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Consideriamo nel termine cinetico di cui sopra la componente inerziale:

$$TC_{\text{INERZIALE}} = + \frac{1}{12} \rho \cdot B^2 \cdot G \left\{ B^2 \cdot [\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{2} \cdot G^2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Ricordiamo che il termine cinetico della massa aggiunta esaminato per la paratoia (cfr. par. 7.1.4) risulta della forma:

$$J_{\text{AGG}} \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} \quad \text{con} \quad J_{\text{AGG}} = 3.5 \cdot 10^8 \text{ kg}_M \cdot \text{m}^2 \quad \text{per } C_M = 1 \text{ nel caso della Paratoia di Chioggia}$$

Si ricorda che il calcolo di  $J_{\text{AGG}}$  è basato su concetti e metodi relativi all'analisi del moto di un corpo entro un fluido non limitato.

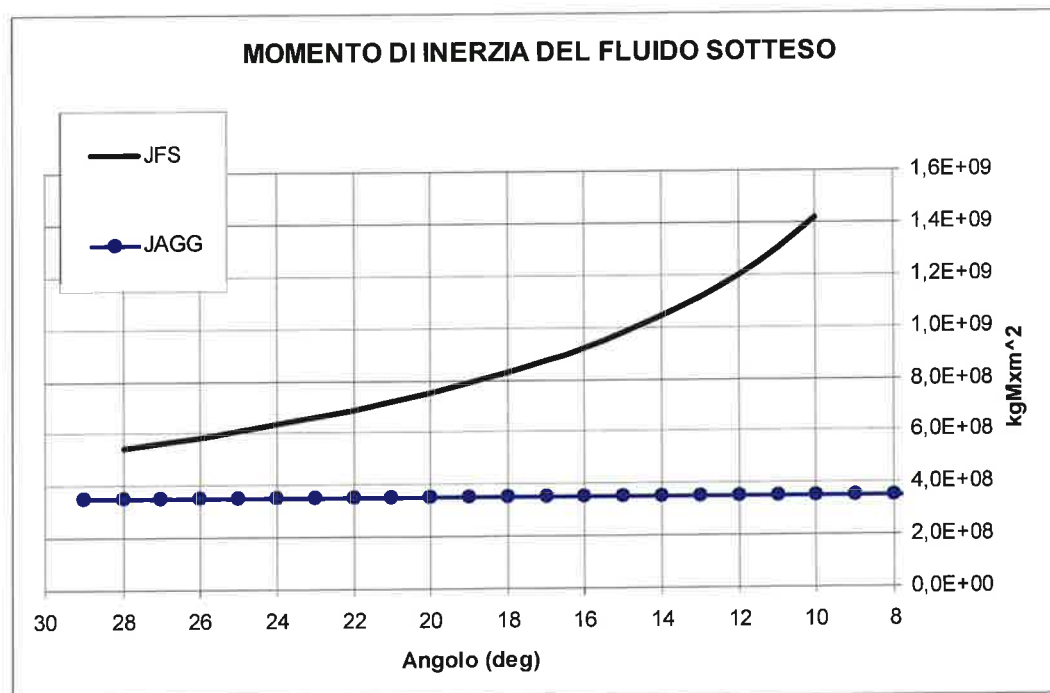
In analogia per il fluido sotteso possiamo scrivere:

$$TC_{\text{INERZIALE}} = J_{\text{FS}}(\theta) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Con:

$$J_{\text{FS}}(\theta) = + \frac{1}{12} \rho \cdot B^2 \cdot G \cdot \left\{ B^2 \cdot [\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{2} \cdot G^2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\}$$


Il diagramma di  $J_{\text{FS}}$  sempre per la paratoia di Chioggia è dato nella figura seguente in funzione dell'angolo  $\theta$ :



Si considerino gli angoli di abbattimento prossimi alla posizione di equilibrio statico, e cioè tra 28 e 20 gradi; in questo intervallo l'interazione del fluido sotteso con il fondo del cassone di alloggiamento è la minima durante il moto e la paratoia si può ritenere nelle condizioni più vicine all'ipotesi ideale di moto entro un fluido non limitato, adottate implicitamente per il calcolo di  $J_{\text{AGG}}$ .

In tale intervallo il valore di  $J_{\text{FS}}$  è in ottimo accordo con il valore di  $J_{\text{AGG}}$ , calcolato per la parte del fluido sovrastante la paratoia e ponendo conservativamente  $C_M = 1$ .



	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 41
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

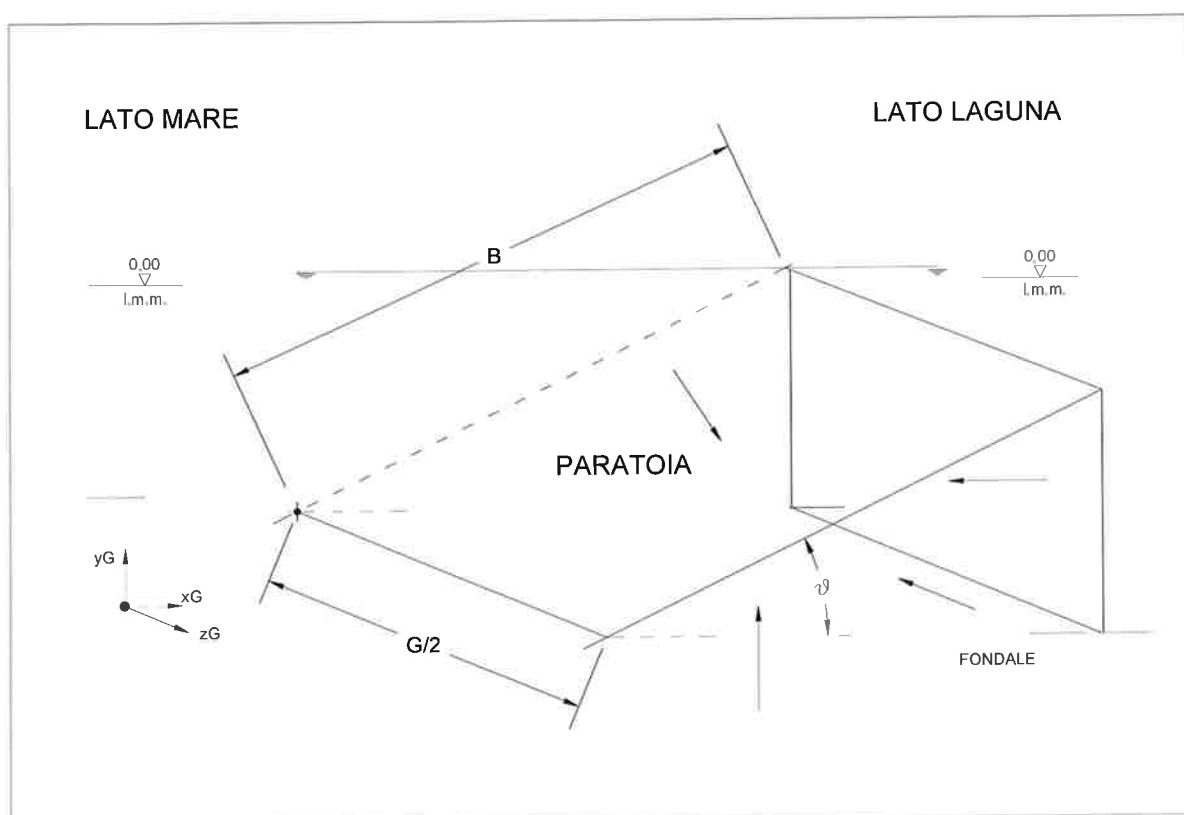
## 8.2 MOMENTO DELLE FORZE ESTERNE

La massa d'acqua sottesa è soggetta alla forza di gravità ed alla pressione esterna.

Per come è stato definito il sistema (cfr. par. 6.1) la pressione esercitata dall'ambiente esterno sul sistema paratoia/fluido sotteso andrebbe calcolata considerando le superfici effettivamente di contorno del sistema.

In realtà in par. 7.2.4 abbiamo calcolato la spinta idrostatica sull'intera paratoia, includendo quindi anche la superficie di confine con la massa sottesa, che in verità è un confine interno e non esterno.

Pertanto, dovendo calcolare le azioni esterne sul fluido sotteso dobbiamo – per compensazione- aggiungere nel calcolo presente una forza pari ed opposta a quella impropriamente considerata in par. 7.2.4, come schematizzato in figura.




Il complesso delle pressioni applicate e rappresentate in figura rappresenta la pressione idrostatica globale sul fluido sotteso.

Si sa d'altronde che la risultante della pressione idrostatica su un volume è pari e opposta al peso dell'acqua contenuta, dunque le due azioni gravità e pressione agenti sulla massa fluida si elidono.

Pertanto è corretto porre:

$$N_F(\theta) = 0$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 42
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 8.3 LIMITAZIONE DELLA VELOCITÀ

In par. 9 abbiamo derivato il campo di velocità nel fluido sotteso in ipotesi nonviscoso-irrotazionale. Abbiamo quindi concluso che l'efflusso avviene essenzialmente dai confini laterali con velocità:

$$v_z(z) = \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot z \quad 0 \leq z \leq \frac{G}{2}$$

La velocità massima si ottiene per  $G/2$  e vale:

$$V_{\text{MAX}} = \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \frac{G}{2}$$

Dato che considereremo solo questa componente di velocità, abbiamo eliminato per semplicità il pedice "z".

L'espressione di cui sopra porta, per valori finiti della velocità angolare, a valori illimitati di velocità  $V_{\text{MAX}}$ , per angolo  $\theta \rightarrow 0$ .

La velocità viene nelle condizioni reali limitata dalla viscosità, della quale è dunque necessario tenere conto.

Lo sviluppo del problema a questo punto diventa complesso oltre gli scopi del presente trattazione, per cui procederemo in modo approssimato ed euristico.

Essendo piccoli gli angoli di interesse nella presente trattazione, nelle formule sviluppate nel seguito faremo uso delle approssimazioni:

$$\cos(\theta) \approx 1 \quad ; \quad \sin(\theta) \approx \theta \ll 1 \quad ; \quad \text{tg}(\theta) \approx \theta \ll 1$$

Pertanto:


$$V_{\text{MAX}} \approx \dot{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{G}{2}$$

Considerando ancora il moto del fluido come non-viscoso, dal teorema di Bernoulli (allo stato stazionario) risulta che:

$$p(z=0) + \frac{1}{2} \rho \cdot v^2(z=0) = p\left(z = \frac{G}{2}\right) + \frac{1}{2} \rho \cdot V^2$$

Dove  $z=0$  rappresenta la mezzeria della paratoia (ove la velocità laterale è nulla) e  $z=G/2$  rappresenta l'estremo laterale della paratoia (dove la velocità è massima e il fluido fuoriesce).

Possiamo elementarmente ipotizzare che all'esterno la pressione sia quella idrostatica:

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 43
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$p\left(z = \frac{G}{2}\right) = p + \rho \cdot g \cdot y$$

In ogni caso:

$$\Delta p(z = 0) = \frac{1}{2} \rho \cdot V_{MAX}^2 - \frac{1}{2} \rho \cdot v^2(z = 0)$$

Essendo (mezzeria della paratoia):

$$v(z = 0) = 0$$

Si ottiene:

$$\Delta p(z = 0) = \frac{1}{2} \rho \cdot V_{MAX}^2$$

D'altronde una trattazione elementare (Rif. [G.2]) dello strato limite viscoso (in condizioni di turbolenza) porta a determinare che lo sforzo tagliante su una superficie del fluido è:

$$\tau \approx 0.03 \cdot \rho \cdot V_{MED}^2 \frac{1}{R^5}$$

$$R = \frac{V_{MED} \cdot L_{MED}}{\nu} \quad \text{Numero di Reynolds}$$

Ove:

$V_{MED}$  velocità media del fluido lungo il percorso

$\nu$  viscosità cinematica


$L_{MED}$  lunghezza media del percorso

Si noti che per semplificare la trattazione ed evitare complicazioni di calcolo sono stati adottati dei valori medi.

E' intuitivo che quando la forza resistente sviluppata da  $\tau$  eguaglia la  $\Delta p$  il fluido non è più in grado di accelerare e mantiene la sua velocità uniforme lungo il percorso.

L'area sulla quale agisce la pressione è:

$$A_z = \frac{1}{2} B^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \approx \frac{1}{2} B^2 \cdot \theta \quad \text{triangolo laterale}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 44
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

L'area sulla quale agisce la forza viscosa (considerando mezza paratoia) è data dalla superficie del fondo più quella della paratoia stessa, e cioè:

$$A_{\tau} = \frac{G}{2}B + \frac{G}{2}B \cdot \cos(\theta) \approx G \cdot B$$

Possiamo pertanto asserire che la trattazione non-viscosa è valida fintanto che:

$$\alpha \cdot \Delta p(z=0) \cdot A_z \geq \tau \cdot A_{\tau}$$

E cioè quando la forza viscosa (perdita di carico) supera la "quota rilevante"  $\alpha$  della forza motrice non viscosa.

La sciamo al momento indeterminato il parametro  $\alpha$ .

Sostituendo le espressioni note si ha:

$$\alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \cdot V_{MAX}^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{2} B^2 \cdot \theta \right) \geq \left( 0.03 \cdot \rho \cdot V_{MED}^2 \frac{1}{R^5} \right) \cdot (G \cdot B)$$

Poniamo poi:

$$V_{MED} = \frac{1}{2} V_{MAX}$$

$$L_{MED} = \frac{1}{2} \left( \frac{G}{2} \right) = \frac{G}{4}$$

Quindi:

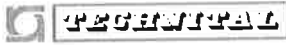
$$R = \frac{V_{MED} \cdot L_{MED}}{v} = \frac{1}{v} \frac{1}{2} V_{MAX} \frac{G}{4} = \frac{V_{MAX} \cdot G}{8 \cdot v}$$

$$\alpha \cdot \left( \frac{1}{2} \rho \cdot V_{MAX}^2 \right) \cdot \left( \frac{1}{2} B^2 \cdot \theta \right) \geq \left( 0.03 \cdot \rho \cdot \left( \frac{1}{2} V_{MAX} \right)^2 \frac{1}{\left( \frac{V_{MAX} \cdot G}{8 \cdot v} \right)^5} \right) \cdot (G \cdot B)$$

$$\alpha \cdot B \cdot \theta \geq 0.03 \cdot \left( \frac{8 \cdot v}{V_{MAX} \cdot G} \right)^5 \cdot G$$

Da cui:

$$V_{MAX} \cdot \theta^5 \geq 8 \cdot (0.03)^5 \frac{1}{\alpha^5} \cdot v \cdot \frac{G^4}{B^5}$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 45
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Sostituendo la espressione della velocità  $V_{MAX}$ :

$$\left( \dot{\theta} \cdot \frac{1}{\theta} \cdot \frac{G}{2} \right) \cdot \theta^5 \geq 8 \cdot (0.03)^5 \frac{1}{\alpha^5} \cdot v \cdot \frac{G^4}{B^5}$$

$$\dot{\theta} \cdot \theta^4 \geq 3.9 \cdot 10^{-7} \frac{1}{\alpha^5} \cdot v \cdot \frac{G^3}{B^5}$$

Questa espressione costituisce la limitazione cercata, ossia esprime il campo di validità della trattazione di par. 9 e delle conseguenti valutazioni dell'energia cinetica della massa fluida sottesa.

Si ritiene appropriato porre:

$$\alpha = 0.3$$

Per cui utilizzando:

$$v = 1.01 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2 / \text{s} \quad \text{viscosità cinematica acqua a } 20^\circ$$

Si ottiene il campo di validità del modello non-viscoso:

$$\dot{\theta} \cdot \theta^4 \geq 1.6 \cdot 10^{-10} \cdot \frac{G^3}{B^5}$$

Per una valutazione di quanto sopra, poniamo:

$$\dot{\theta} = 0.5 \text{ deg/s} = 0.009 \text{ rad/s} \quad ; \quad B = 25 \text{ m} \quad ; \quad G = 20 \text{ m}$$

Risulta:

$$\theta \geq 0.002 \text{ rad} = 0.11 \text{ deg}$$


$$V_{MAX} = 45 \text{ m/s}$$

La limitazione presentemente determinata è utilizzata per disattivare progressivamente il termine cinetico legato a  $T_F$  (cfr. par. 8.1); infatti per effetto della viscosità la velocità del fluido non si incrementa in modo apprezzabile e dunque è appropriato ritenere che:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{d}{dt} T_F = 0$$

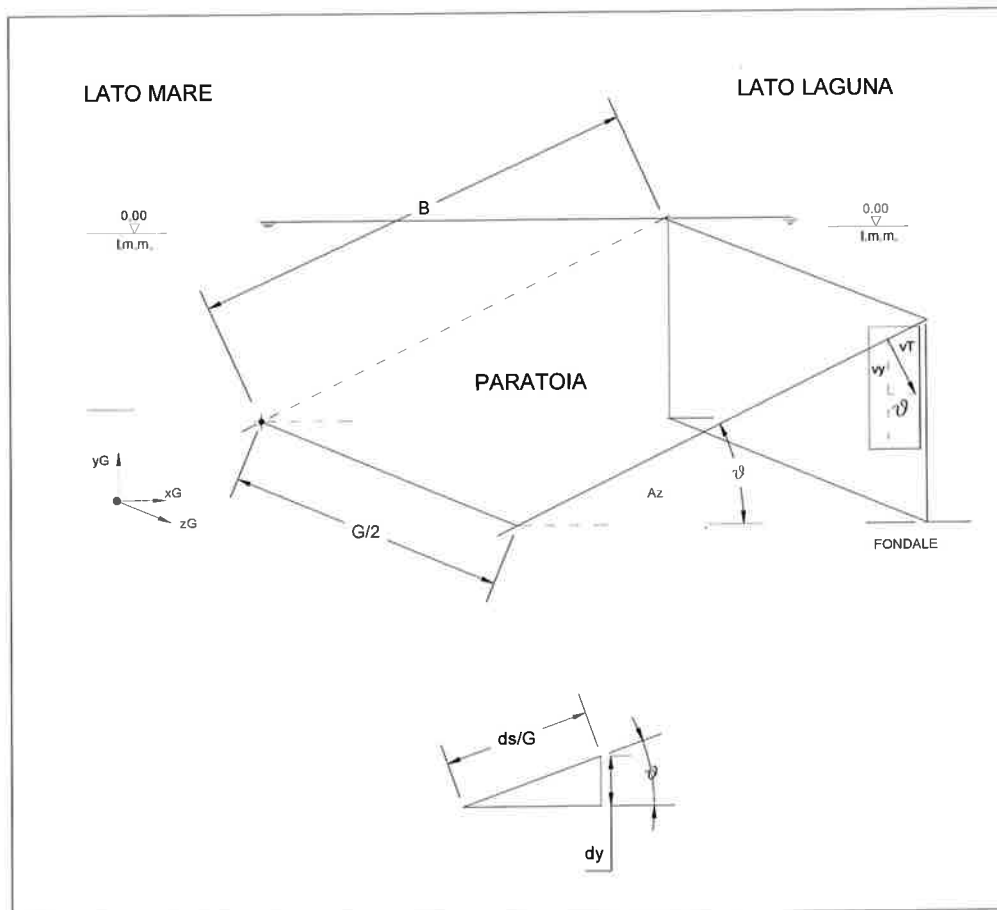
Si osservi che tale evenienza si presenta per angoli molto piccoli, quando ormai la paratoia è prossima all'arresto, dunque le approssimazioni introdotte hanno un effetto trascurabile sul risultato finale.

Di fatto la presente limitazione è orientata principalmente ad evitare che, nel modello matematico di calcolo, si verifichino situazioni di divergenza numerica.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 46
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 9 FLUIDODINAMICA DEL SISTEMA

Analizziamo il sistema come schematizzato in figura dove viene riportata metà della paratoia:




La parete della paratoia si trova all'angolo  $\theta$  e si chiude con velocità angolare:

$$\frac{d}{dt}\theta = \dot{\theta}$$

Consideriamo il fluido (acqua marina) compreso tra la parete della paratoia ed il fondale (ipotizziamo qui che la forma del cassone di alloggiamento non abbia un rilievo decisivo e comunque l'ipotesi adottata è conservativa).

Il fluido sarà caratterizzato in generale da un campo di velocità non nulle in tutte e tre le direzioni.

Ammettendo il fluido incomprimibile, irrotazionale e non viscoso (Rif. [G.2]), il campo di velocità è definito dalla funzione potenziale  $\phi(x,y,z)$  tale che:

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 47
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} ; \quad v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} ; \quad v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad \text{eq. di Laplace}$$

L'equazione di Laplace garantisce che il campo sia appunto irrotazionale e che sia soddisfatta l'equazione di continuità.

Le condizioni al contorno più elementari sono:

$$v_y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad y = 0, \forall x, z \quad \text{impenetrabilità del fondo del cassone di alloggiamento}$$

$$v_x = \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0 \quad x = 0, \forall y, z \quad \text{fuoriuscita trascurabile sul lato cerniera rispetto agli altri lati}$$

$$v_z = \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0 \quad z = 0, \forall y, x \quad \text{velocità trasversale nulla per simmetria al centro della paratoia}$$

Cercando di risolvere l'equazione di Laplace con polinomiali, si verifica facilmente che il potenziale (che fornisce velocità variabili linearmente dall'origine):

$$\phi = a \cdot x^2 + b \cdot y^2 + c \cdot z^2$$

Rispetta le condizioni al contorno di cui sopra ed è soluzione dell'equazione di Laplace a condizione che:

$$a + b + c = 0$$

Le velocità dunque sono:

$$v_x = 2 \cdot a \cdot x \quad ; \quad v_y = 2 \cdot b \cdot y \quad ; \quad v_z = 2 \cdot c \cdot z$$


Resta a questo punto da imporre la condizione al contorno sulla faccia in moto della paratoia.

A rigore dovrebbe essere imposta una condizione sulla velocità del fluido normale alla superficie che ha in generale non zero le componenti in x ed in y; tuttavia la forma della soluzione ci permette di imporre una condizione su una sola delle due, e pertanto scegliamo la componente  $v_y$ .

Si osservi al proposito che, a causa della posizione angolare ribassata della paratoia ( $\theta$  piccolo), la velocità verticale in y si può ritenere con buona approssimazione normale alla superficie, dunque l'approssimazione è accettabile.

Pertanto la condizione è:

$$v_y = -v_T \cdot \cos(\theta) = -\dot{\theta} \cdot \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos(\theta)$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 48
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Sulla superficie in parola si ha che:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg}(\theta)$$

$$x = \frac{y}{\operatorname{tg}(\theta)}$$

Pertanto:

$$v_Y = -\dot{\theta} \cdot \sqrt{\left(\frac{y}{\operatorname{tg}(\theta)}\right)^2 + y^2} \cdot \cos(\theta) = -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1}$$

Dato che:

$$v_Y = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 2 \cdot b \cdot y$$

Si conclude immediatamente che:

$$b = -\frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1}$$

Restano ora da terminare le altre due costanti "a" e "c".

Allo scopo introduciamo una ulteriore condizione al contorno, imponendo che la portata di volume verticale prodotta dal moto della paratoia (velocità verticale per area) sia pari alla portata di volume uscente dalle superficie frontale e laterale indicate al momento come  $A_x$  e  $A_z$ .


Questa condizione riflette ancora la continuità, ma a livello macroscopico.

Le portate individuali attraverso le facce frontali e laterali sono:

$$P_X = A_X \cdot v_x [B \cdot \cos(\theta)] = A_X \cdot 2 \cdot a \cdot B \cdot \cos(\theta) = 2 \cdot A_X \cdot B \cdot \cos(\theta) \cdot a$$

$$P_Z = A_Z \cdot v_z \left(\frac{G}{2}\right) = A_Z \cdot 2 \cdot c \cdot \frac{G}{2} = A_Z \cdot G \cdot c$$



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 49
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

La portata (verticale) entrante sul lato inferiore della paratoia è:

$$P_{PAR} = \int_{PAR} ds \cdot v_Y \quad ds \text{ elemento di superficie}$$

Da considerazioni elementari risulta che:

$$ds = \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} dx$$

e sulla paratoia:

$$y = x \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

Per cui:

$$P_{PAR} = \int_{PAR} ds \cdot v_Y = \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot v_Y = \frac{G}{2} \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dy \cdot (2 \cdot b \cdot x \cdot \operatorname{tg}(\theta)) = G \cdot \frac{1}{\cos(\theta)} \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot b \cdot \frac{1}{2} [B \cdot \cos(\theta)]^2$$

$$P_{PAR} = \frac{1}{2} G \cdot B^2 \cdot b \cdot \operatorname{sen}(\theta)$$

Sostituendo il valore già determinato per "b" si ha:

$$P_{PAR} = \frac{1}{2} G \cdot B^2 \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \left[ -\frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} \right] = -\frac{1}{4} G \cdot B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1}$$

Pertanto la condizione addizionale si configura come:

$$P_X + P_Z + P_{PAR} = 0$$


$$2 \cdot A_X \cdot B \cdot \cos(\theta) \cdot a + A_Z \cdot G \cdot c - \frac{1}{4} G \cdot B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} = 0$$

Nell'equazione risultati positivi per "a" e "c" danno luogo a velocità uscenti dal volume, congruentemente con il segno negativo (entrante) della portata  $P_{PAR}$ .

L'equazione appena trovata va combinata con quella derivante dall'equazione di Laplace (b è noto):

$$a + c - \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} = 0$$

Le due equazioni nelle due incognite "a" e "c" consentono di determinare univocamente il campo di moto e di chiudere il problema.

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 50
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Per semplicità di notazione poniamo temporaneamente:

$$\alpha = \frac{1}{4} G \cdot B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2(\theta)} + 1}$$

$$\beta = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2(\theta)} + 1}$$

Ottenendo:

$$2 \cdot A_X \cdot B \cdot \cos(\theta) \cdot a + A_Z \cdot G \cdot c - \alpha = 0$$

$$a + c - \beta = 0$$

Pertanto:

$$c = \beta - a$$

$$2 \cdot A_X \cdot B \cdot \cos(\theta) \cdot a + A_Z \cdot G \cdot (\beta - a) - \alpha = 0$$

$$a = \frac{\alpha - A_Z \cdot G \cdot \beta}{2 \cdot A_X \cdot B \cdot \cos(\theta) - A_Z \cdot G}$$

Le aree di uscita sono rispettivamente:

$$A_X = \frac{G}{2} \cdot (B \cdot \sin(\theta)) = \frac{G}{2} \cdot B \cdot \sin(\theta) \quad \text{sezione ret tangolare frontale}$$

$$A_Z = \frac{1}{2} (B \cdot \cos(\theta)) \cdot (B \cdot \sin(\theta)) = \frac{1}{2} B^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad \text{sezione triangolare laterale}$$

Pertanto:

$$a = \frac{\frac{1}{4} G \cdot B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2(\theta)} + 1} - \left( \frac{1}{2} B^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \cdot G \cdot \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\tan^2(\theta)} + 1}}{2 \cdot \left( \frac{G}{2} \cdot B \cdot \sin(\theta) \right) \cdot B \cdot \cos(\theta) - \left( \frac{1}{2} B^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \right) \cdot G}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 51
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$a = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [1 - \cos(\theta)]$$

$$c = \beta - a = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} - \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [1 - \cos(\theta)]$$

$$c = \beta - a = \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \quad c \geq 0 \quad 0 \leq \theta \leq 60^\circ$$

Dai risultati di cui sopra si evince che:

- i coefficienti "a" e "c" (quest'ultimo nel range di angoli  $\theta$  di nostro interesse) sono entrambi positivi, e pertanto le velocità  $v_x$  e  $v_z$  sono positive, e dunque uscenti dal volume compresso dalla paratoia;
- i coefficienti "a" e "c" sono indipendenti dalle dimensioni geometriche del sistema, ma dipendono solo dall'angolo e dalla velocità angolare;
- le velocità massime delle particelle di fluido dipenderanno invece anche dalle dimensioni effettive della paratoia, in quanto sono ottenute agli estremi del volume in questione;
- il coefficiente "c" tende all'infinito per  $\theta \rightarrow 0$ , e dunque anche la velocità  $v_z$  del fluido segue lo stesso andamento;
- il coefficiente "a" tende a zero per  $\theta \rightarrow 0$ , e dunque anche la velocità  $v_x$  del fluido segue lo stesso andamento;
- da quanto sopra evidenziato l'efflusso per angoli piccoli avviene lateralmente e non frontalmente

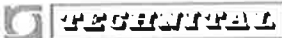
Il fatto che la velocità laterale tenda all'infinito per  $\theta \rightarrow 0$  può essere erroneamente attribuito al progressivo ridursi a zero dell'area laterale di uscita.

In realtà tale comportamento deve essere ascritto all'andamento della velocità verticale  $v_y$ , che come abbiamo visto è:

$$v_y = -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1}$$

Tale velocità è sempre finita sul lato paratoia e sempre zero sul fondo, con il fatto però che la distanza tra i due piani tende a zero: da ciò deriva che la derivata della velocità verticale in direzione verticale è comunque crescente per  $y \rightarrow 0$ , come evidente dalla:

$$\frac{d}{dy} v_y = \frac{d}{dy} \left( -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot y \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \right) = -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 52
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Siccome l'equazione di continuità (inclusa nell'equazione di Laplace) coinvolge proprio tale derivata, le altre componenti di velocità dovranno comportarsi di conseguenza per "asportare" nelle direzioni x e z il fluido in accumulo dalla direzione y.

E abbiamo visto come la portata in direzione x sia progressivamente sempre meno rilevante.

Pertanto l'introduzione di eventuali aree di traferro costanti in uscita, per esempio del tipo:

$$A_z = A_{z0} + \frac{1}{2} B^2 \cdot \cos(\theta) \cdot \sin(\theta) \quad \text{triangolo laterale con traferro}$$

non potrà limitare superiormente il profilo di velocità  $v_z$  eliminando l'infinito.

Quello che nella realtà pone un limite alla velocità di uscita è la viscosità, il che condurrà alle considerazioni sviluppate al par. 8.3.

In conclusione si ha:

$$v_x = 2 \cdot a \cdot x \quad ; \quad v_y = 2 \cdot b \cdot y \quad ; \quad v_z = 2 \cdot c \cdot z$$


$$v_x(x) = \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [1 - \cos(\theta)] \cdot x \quad 0 \leq x \leq B \cdot \cos(\theta)$$

$$v_y(y) = -\dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot y \quad 0 \leq y \leq B \cdot \sin(\theta)$$

$$v_z(z) = \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot z \quad 0 \leq z \leq \frac{G}{2}$$

L'energia cinetica posseduta dal "volume sotteso" per una configurazione di posizione e velocità angolare si calcola come integrale di volume esteso al volume  $V(\theta)$  occupato dal fluido:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \int_{V(\theta)} du \frac{1}{2} \rho [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2]$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 53
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \int_{v(\theta)} du \frac{1}{2} \rho [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2] = \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^z dy [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2]$$

In modo analogo a quanto fatto in precedenza riconosciamo che (essendo verticalmente limitato dalla paratoia) per una data coordinata "x":

$$0 \leq y \leq x \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

Per cui:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy [(v_x)^2 + (v_y)^2 + (v_z)^2]$$

Utilizzando temporaneamente le espressioni:

$$v_x = 2 \cdot a \cdot x \quad ; \quad v_y = 2 \cdot b \cdot y \quad ; \quad v_z = 2 \cdot c \cdot z$$

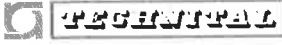
$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy [(2 \cdot a \cdot x)^2 + (2 \cdot b \cdot y)^2 + (2 \cdot c \cdot z)^2]$$

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy (2 \cdot a \cdot x)^2 + \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy (2 \cdot b \cdot y)^2 + \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy (2 \cdot c \cdot z)^2$$

Sviluppando i singoli integrali si ha:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy (2 \cdot a \cdot x)^2 &= \frac{1}{2} \rho \cdot 4 \cdot a^2 \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy x^2 = 2 \rho \cdot a^2 \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx x^2 \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \\ &= 2 \rho \cdot a^2 \frac{G}{2} \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx x^2 (x \cdot \operatorname{tg}(\theta)) = \rho \cdot a^2 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx x^3 = \rho \cdot a^2 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \left( \frac{1}{4} [B \cdot \cos(\theta)]^4 \right) \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy (2 \cdot a \cdot x)^2 = \frac{1}{4} \rho \cdot a^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^4(\theta)$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 54
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot (2 \cdot b \cdot y)^2 = \frac{1}{2} \rho \frac{G}{2} 4b^2 \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot y^2 = \rho G b^2 \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \left( \frac{1}{3} (x \cdot \operatorname{tg}(\theta))^3 \right)$$

$$= \frac{1}{3} \rho G b^2 \operatorname{tg}^3(\theta) \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \cdot x^3 = \frac{1}{3} \rho G b^2 \operatorname{tg}^3(\theta) \left( \frac{1}{4} (B \cdot \cos(\theta))^4 \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \operatorname{sen}(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot (2 \cdot b \cdot y)^2 = \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot b^2 \cdot \operatorname{tg}^3(\theta) \cos^4(\theta)$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot [(2 \cdot c \cdot z)^2] = \frac{1}{2} 4 \cdot c^2 \cdot \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot z^2 = 2 \cdot c^2 \cdot \rho \int_0^{G/2} dz \cdot z^2 \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy$$

$$= 2 \cdot c^2 \cdot \rho \int_0^{G/2} dz \cdot z^2 \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \cdot (x \cdot \operatorname{tg}(\theta)) = 2 \cdot c^2 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot \rho \int_0^{G/2} dz \cdot z^2 \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \cdot x = 2 \cdot c^2 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot \rho \int_0^{G/2} dz \cdot z^2 \left( \frac{1}{2} (B \cdot \cos(\theta))^2 \right)$$

$$= 2 \cdot c^2 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot \rho \frac{1}{2} (B \cdot \cos(\theta))^2 \int_0^{G/2} dz \cdot z^2 = c^2 \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cdot \rho (B \cdot \cos(\theta))^2 \left( \frac{1}{3} \left( \frac{G}{2} \right)^3 \right)$$

$$\frac{1}{2} \rho \int_0^{G/2} dz \int_0^{B \cdot \cos(\theta)} dx \int_0^{x \cdot \operatorname{tg}(\theta)} dy \cdot [(2 \cdot c \cdot z)^2] = \frac{1}{24} c^2 \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

Pertanto l'energia cinetica della massa fluida sottesa da mezza paratoia è:


$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{4} \rho \cdot a^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^4(\theta) + \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot b^2 \cdot \operatorname{tg}^3(\theta) \cos^4(\theta) + \frac{1}{24} c^2 \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

Sostituendo le espressioni dei coefficienti "a", "b" e "c" si ottiene:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{4} \rho \cdot \left[ \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [1 - \cos(\theta)] \right]^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^4(\theta) +$$

$$\frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot \left[ -\frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \cos(\theta) \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} \right]^2 \cdot \operatorname{tg}^3(\theta) \cos^4(\theta)$$

$$+ \frac{1}{24} \left[ \frac{1}{2} \dot{\theta} \cdot \sqrt{\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1} \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \right]^2 \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 55
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{16} \rho \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^4(\theta) \cdot [1 - \cos(\theta)]^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1 \right] +$$

$$\frac{1}{48} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1 \right] \cdot \operatorname{tg}^3(\theta) \cos^6(\theta) + \frac{1}{96} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} + 1 \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \cdot \operatorname{tg}(\theta)$$

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{16} \rho \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \cos^4(\theta) \cdot [1 - \cos(\theta)]^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right]$$

$$+ \frac{1}{48} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(\theta)] \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^6(\theta) + \frac{1}{96} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

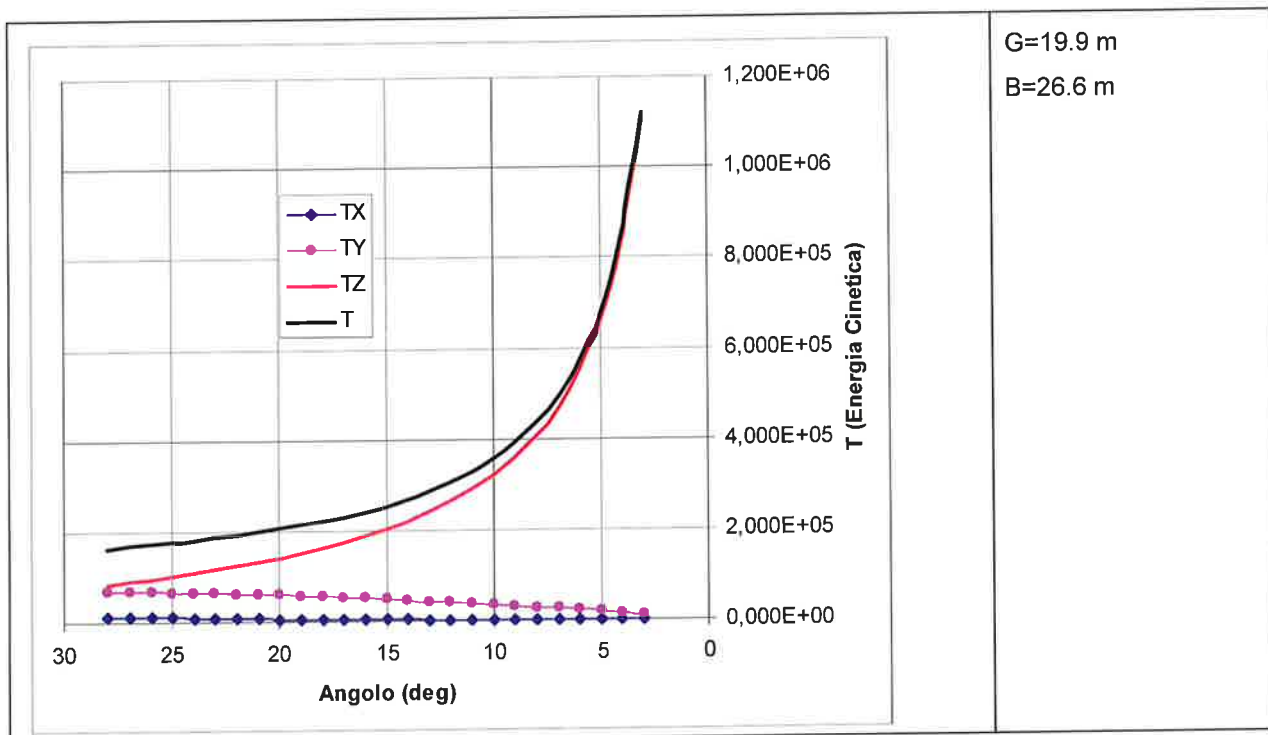
Dette  $T_x$   $T_y$   $T_z$  le energie cinetiche generate rispettivamente da  $v_x$ ,  $v_y$  e  $v_z$ , si ha:


$$T_x(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{16} \rho \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot \cos^4(\theta) \cdot [1 - \cos(\theta)]^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right]$$

$$T_y(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{48} \rho \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot B^4 \cdot G \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(\theta)] \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^6(\theta)$$

$$T_z(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{96} \cdot \rho \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot G^3 B^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

La figura seguente riporta l'andamento delle componenti individuali e del totale (a meno della densità e della velocità angolare, che sono fattori comuni alle diverse espressioni) con i parametri geometrici della paratoia di Chioggia:



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 56
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Se ne conclude che:

$$T_X(\theta, \dot{\theta}) \approx 0$$

Per cui, si può porre:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{48} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [1 + \operatorname{tg}^2(\theta)] \cdot \operatorname{tg}(\theta) \cos^6(\theta) + \frac{1}{96} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

Le espressioni di cui sopra sono state ricavate considerando mezza paratoia, per cui l'energia cinetica complessiva del fluido sotteso dalla paratoia e da essa spostato  $T_F$  si ottiene raddoppiando il valore ottenuto:

$$T_F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)$$

Quella che interessa, naturalmente, non è l'energia  $T_F$  in sé, quanto la sua variazione durante il moto, secondo la formulazione lagrangiana (cfr. par 10).

Per il calcolo delle derivate connesse a  $T_F$  osserviamo che:


$$T_F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} (\dot{\theta})^2 \cdot \tau_F(\theta)$$

$$\tau_F(\theta) = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\}$$

La derivata da calcolare è:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} T_F(\theta) = 2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\}$$



	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 57
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Essendo:

$$\frac{d}{d\theta} \operatorname{tg}(\theta) = 1 + \operatorname{tg}^2(\theta)$$

Si ha:

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta) = 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\}$$


$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta) &= 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) \right\} \\ &+ 2 \frac{\partial}{\partial \theta} \left\{ \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) \right] \\ &+ \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta, \dot{\theta}) &= \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + [\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cos^6(\theta) \right\} \\ &+ \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) + \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right. \\ &\quad \left. + \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \cos^2(\theta) \right\} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \tau_F(\theta) = \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot \left\{ [1 + \operatorname{tg}^2(\theta) + 3\operatorname{tg}^2(\theta)(1 + \operatorname{tg}^2(\theta))] \cdot \cos^6(\theta) - 6[\operatorname{tg}(\theta) + \operatorname{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^5(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \right\}$$

$$+ \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} &\left[ -\frac{1}{\operatorname{tg}^2(\theta)} (1 + \operatorname{tg}^2(\theta)) + 1 + \operatorname{tg}^2(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ &- 4 \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \operatorname{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \\ &- 2 \cdot \left[ \frac{1}{\operatorname{tg}(\theta)} + \operatorname{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos(\theta) \operatorname{sen}(\theta) \end{aligned} \right\}$$

	Rev.	Data.	EI. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 58
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Col risultato ottenuto possiamo calcolare la derivata temporale della  $T_F$ , per ottenere delle indicazioni sul suo andamento.

$$\frac{d}{dt} T_F(\theta, \dot{\theta}) = \frac{\partial}{\partial \theta} T_F(\theta, \dot{\theta}) \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F(\theta, \dot{\theta}) \frac{d\dot{\theta}}{dt} = \frac{\partial}{\partial \theta} T_F(\theta, \dot{\theta}) \cdot \dot{\theta} + \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T_F(\theta, \dot{\theta}) \ddot{\theta}$$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} T_F(\theta, \dot{\theta}) \\ &= \left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{24} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot (\dot{\theta})^2 \cdot \left\{ [1 + 3\text{tg}^2(\theta)] \cdot (1 + \text{tg}^2(\theta)) \cdot \cos^6(\theta) - 6[\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^5(\theta) \text{sen}(\theta) \right\} \\ & + \frac{1}{48} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 (\dot{\theta})^2 \cdot \left\{ \begin{aligned} & \left[ -\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} (1 + \text{tg}^2(\theta)) + 1 + \text{tg}^2(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ & - 4 \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \\ & - 2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \right\} \cdot \dot{\theta} \end{aligned} \right\} \\ & + \left\{ \frac{1}{12} \rho \cdot B^4 \cdot G \cdot \dot{\theta} \cdot [\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{24} \cdot \rho \cdot G^3 B^2 \cdot \dot{\theta} \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \right\} \ddot{\theta} \end{aligned}$$


$$\frac{d}{dt} T_F(\theta, \dot{\theta}) =$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{24} \rho \cdot (\dot{\theta})^3 \cdot B^2 \cdot G \cdot \left\{ \begin{aligned} & \overbrace{B^2 \cdot [1 + 3\text{tg}^2(\theta)] \cdot (1 + \text{tg}^2(\theta)) \cdot \cos^6(\theta) - 6[\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^5(\theta) \text{sen}(\theta)}^{\text{GRAFA 1}} \\ & \left[ -\frac{1}{\text{tg}^2(\theta)} (1 + \text{tg}^2(\theta)) + 1 + \text{tg}^2(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta) \\ & - 4 \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1] \cdot \text{sen}(\theta) \cdot \cos^2(\theta) \\ & - 2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos(\theta) \text{sen}(\theta) \end{aligned} \right\} \\ & + \frac{1}{12} \rho \cdot \dot{\theta} \cdot \ddot{\theta} \cdot B^2 \cdot G \cdot \left\{ \overbrace{B^2 \cdot [\text{tg}(\theta) + \text{tg}^3(\theta)] \cdot \cos^6(\theta) + \frac{1}{2} \cdot G^2 \cdot \left[ \frac{1}{\text{tg}(\theta)} + \text{tg}(\theta) \right] \cdot [2 \cdot \cos(\theta) - 1]^2 \cdot \cos^2(\theta)}^{\text{GRAFA 2}} \right\} \end{aligned}$$

Si osserva che:

- il risultato della prima grafa è sempre negativo (è stato verificato tra 28 e 0 gradi);
- il risultato della seconda grafa è sempre positivo (tutti i termini sono positivi);
- per velocità angolare negativa (paratoia in chiusura), dunque l'energia cinetica cresce in grafa1
- per velocità angolare negativa (paratoia in chiusura) e moto accelerato a chiudere (accelerazione angolare anch'essa negativa), l'energia cinetica cresce anche in grafa2

Se ne conclude che l'andamento predetto per la energia cinetica è congruente.

	Rev.	Data	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 59
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 10 RICHIAMI DI MECCANICA LAGRANGIANA

Le equazioni che governano il sistema sono deducibili dal formalismo lagrangiano (Rif. [G.1]), che viene richiamato per sommi capi nel seguito.

La coordinata lagrangiana è l'angolo di  $\theta$  rotazione.

Pertanto si conoscono le espressioni delle forze esterne, che in particolare diventano momenti; rappresentiamo il complesso delle forze meccaniche (pesi e spinte) cumulativamente come  $N(\theta)$ .

Dunque l'equazione di Lagrange per il sistema (ridotto alla sola variabile  $\theta$ ) è:

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} T \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} T = N(\theta)$$

Nel caso in cui l'energia cinetica  $T$  del sistema sia rappresentabile nella forma:

$$T = \frac{1}{2} J(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2$$

L'equazione diventa:

$$\frac{d}{dt} \left[ J(\theta) \cdot \dot{\theta} \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left[ \frac{1}{2} J(\theta) \cdot (\dot{\theta})^2 \right] = N(\theta)$$


$$J(\theta) \cdot \frac{d}{dt} \left[ \dot{\theta} \right] + \frac{dJ(\theta)}{dt} \cdot \dot{\theta} - \frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \cdot (\dot{\theta})^2 = N(\theta)$$

Essendo:

$$\frac{dJ(\theta)}{dt} = \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt}$$

$$J(\theta) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - \frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \cdot \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = N(\theta)$$

$$J(\theta) \cdot \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{1}{2} \frac{\partial J(\theta)}{\partial \theta} \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 = N(\theta)$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 60
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Benché la derivazione della Equazione di Lagrange venga eseguita ricorrendo al principio dei Lavori Virtuali, nel caso elementare di una sola coordinata si può pervenire alla espressione di cui sopra in modo piuttosto pratico, ricorrendo alla seguente considerazione: il lavoro delle forze esterne nell'unità di tempo deve uguagliare la variazione di energia cinetica, sempre nell'unità di tempo.

Il lavoro nell'unità di tempo è dato da forza per velocità, oppure momento per velocità angolare, per cui:

$$\frac{d}{dt} T = N(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J(\theta) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^2 \right) = N(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} \left( \dot{\theta} \right)^2 \left( \frac{1}{2} J(\theta) \right) + \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} J(\theta) \right) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^2 = N(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} J(\theta) + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) \dot{\theta} \right) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^2 = N(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} J(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^3 = N(\theta) \cdot \dot{\theta}$$

$$\ddot{\theta} J(\theta) + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \theta} J(\theta) \cdot \left( \dot{\theta} \right)^2 = N(\theta)$$

Come si vede il risultato è il medesimo ottenuto dall'equazione di Lagrange.

Questo semplice procedimento chiarisce il senso fisico della formulazione lagrangiana, al di là degli aspetti squisitamente matematici.

Vale la pena però di osservare la generalità della proposizione lagrangiana.


Consideriamo l'espressione della derivata dell'energia cinetica, sempre valida:

$$\frac{d}{dt} T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{dT}{d\dot{\theta}} \cdot \ddot{\theta}$$

Si osservi che se T è omogeneamente del 2-ordine nella velocità angolare:

$$T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta}$$

$$\frac{d}{dt} T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \dot{\theta} \right) = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta}$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 61
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

Quindi eguagliando le due espressioni per la derivata:

$$\frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{dT}{d\dot{\theta}} \cdot \ddot{\theta} = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} + \frac{1}{2} \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \ddot{\theta}$$

$$\frac{dT}{d\dot{\theta}} \cdot \ddot{\theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} - 2 \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Sostituendo nella espressione generale:

$$\frac{d}{dt} T(\theta, \dot{\theta}) = \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta} + \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} - 2 \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} - \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta}$$

Pertanto la:


$$\frac{d}{dt} T = N(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Diventa:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) \dot{\theta} - \frac{dT}{d\theta} \cdot \dot{\theta} = N(\theta) \cdot \frac{d\theta}{dt}$$

Eliminando la velocità angolare si ritrova l'equazione di Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{dT}{d\theta} = N(\theta)$$

	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 62
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

## 11 UNITA' DI MISURA E DATI FISICI GENERALI

### 11.1 UNITÀ DI MISURA

In tutti i calcoli si adotta il Sistema Internazionale di unità (SI).


Nel contesto delle unità SI le quantità più comuni nel calcolo ingegneristico sono espresse come segue:

- Lunghezza: metri (m)
- Forza: Newton (N) – Kilo Newton (kN=10<sup>3</sup>N)
- Sforzo/Pressione: N/m<sup>2</sup>
- Massa: kilogrammo-massa (kg<sub>M</sub>) – ton-massa (t<sub>M</sub> =1000 kg<sub>M</sub>)
- tempo: secondo (s)
- Temperatura: °K (=°C +273.5)

### 11.2 DATI FISICI GENERALI

Nel presente documento si utilizzano i seguenti dati fisici generali

- $p_A = 1,01325 \text{ bar}_A = 101325 \text{ N/m}^2$       pressione atmosferica media  
 $g = 9.81 \text{ m/sec}^2$       accelerazione di gravità  
 $\rho = 1030 \text{ kg}_M/\text{m}^3$       densità di massa dell'acqua di mare  
 $\gamma \approx 1.4$  rapporto tra Calore Specifico a pressione costante e Calore Specifico a volume costante dell'aria.

 <b>PROSERVITA</b>	Rev.	Data.	El. MV080P-PE-MAR-2017-C0	Pag. n. 63
	Rev. C0	Data: 10/06/2013	ANALISI DEL MOTO DI AFFONDAMENTO DELLA PARATOIA: METODO ED EQUAZIONI	

### 11.3 CONVERSIONE TRA UNITÀ DI MISURA DELLA PRESSIONE

Presently or formerly popular pressure units include the following:

- atmosphere (atm)
- manometric units:
  - centimeter, inch, and millimeter of mercury (torr)
  - millimeter, centimeter, meter, inch, and foot of water
- customary units:
  - kip, ton-force (short), ton-force (long), pound-force, ounce-force, and poundal per square inch
  - pound-force, ton-force (short), and ton-force (long)
- non-SI metric units:
  - bar, decibar, millibar
  - kilogram-force, or kilopond, per square centimetre (technical atmosphere)
  - gram-force and tonne-force (metric ton-force) per square centimetre
  - barye (dyne per square centimetre)
  - kilogram-force and tonne-force per square metre
  - sthene per square metre (pieze)

Pressure Units

	pascal (Pa)	bar (bar)	technical atmosphere (at)	atmosphere (atm)	torr (Torr)	pound-force per square inch (psi)
<b>1 Pa</b>	$\equiv 1 \text{ N/m}^2$	$10^{-5}$	$1.0197 \times 10^{-5}$	$9.8692 \times 10^{-6}$	$7.5006 \times 10^{-3}$	$145.04 \times 10^{-6}$
<b>1 bar</b>	100,000	$\equiv 10^6 \text{ dyn/cm}^2$	1.0197	0.98692	750.06	14.5037744
<b>1 at</b>	98,066.5	0.980665	$\equiv 1 \text{ kgf/cm}^2$	0.96784	735.56	14.223
<b>1 atm</b>	101,325	1.01325	1.0332	$\equiv 1 \text{ atm}$	760	14.696
<b>1 torr</b>	133.322	$1.3332 \times 10^{-3}$	$1.3595 \times 10^{-3}$	$1.3158 \times 10^{-3}$	$\equiv 1 \text{ Torr}$ , $\approx 1 \text{ mmHg}$	$19.337 \times 10^{-3}$
<b>1 psi</b>	$6.894 \times 10^3$	$68.948 \times 10^{-3}$	$70.307 \times 10^{-3}$	$68.046 \times 10^{-3}$	51.715	$\equiv 1 \text{ lbf/in}^2$

Example reading:  $1 \text{ Pa} = 1 \text{ N/m}^2 = 10^{-5} \text{ bar} = 10.197 \times 10^{-6} \text{ at} = 9.8692 \times 10^{-6} \text{ atm}$ , etc.